

Plongements de surfaces à métriques polyédriques et origami

Inter'Actions 2019

Tanessi Quintanar

Université Lyon 1, Université Grenoble-Alpes

21 mai 2019

Métrie polyédrique

Definition

Une surface S est munie d'une métrique *polyédrique* g , si tout point $p \in S$ admet un voisinage isométrique à un voisinage du sommet d'un cône euclidien.

On a deux types de points: les points correspondant à des cônes d'angle 2π (réguliers) et les autres points (singuliers).

Une surface munie d'une métrique polyédrique g est plate en dehors des points singuliers.

Plongement

Definition

Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est un plongement de X dans Y si elle induit un homéomorphisme de X dans $f(X)$.

Plongements isométriques PL

Definition

Soit S une surface munie d'une métrique polyédrique g . Un plongement isométrique $f : S \rightarrow \mathbb{E}^3$ est PL si son image est un complexe simplicial plongé (c'est à dire une union de triangles euclidiens).

Un théorème important

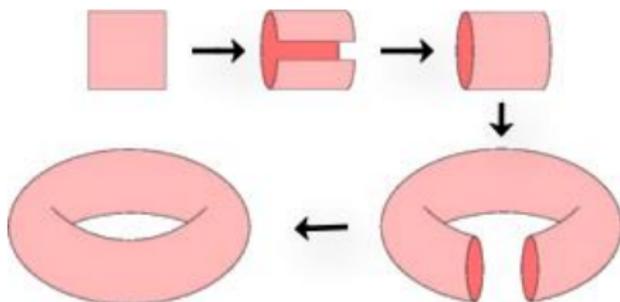
Theorem (Burago et Zalgaller, 1996)

Soit S une surface admettant une métrique polyédrique, alors S admet un plongement isométrique PL dans \mathbb{E}^3

Remarque: La preuve ne fournit pas de moyen pratique pour réaliser ces plongements (Voir à ce sujet la discussion de E. Saucan dans l'article “Isometric embeddings in imaging and vision: Facts and fiction”, 2010)

Definition

Un tore plat \mathbb{T}_Λ est le quotient $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{E}^2/\Lambda$, où Λ est un réseau donné par $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$, avec (v_1, v_2) une base quelconque de \mathbb{E}^2 .



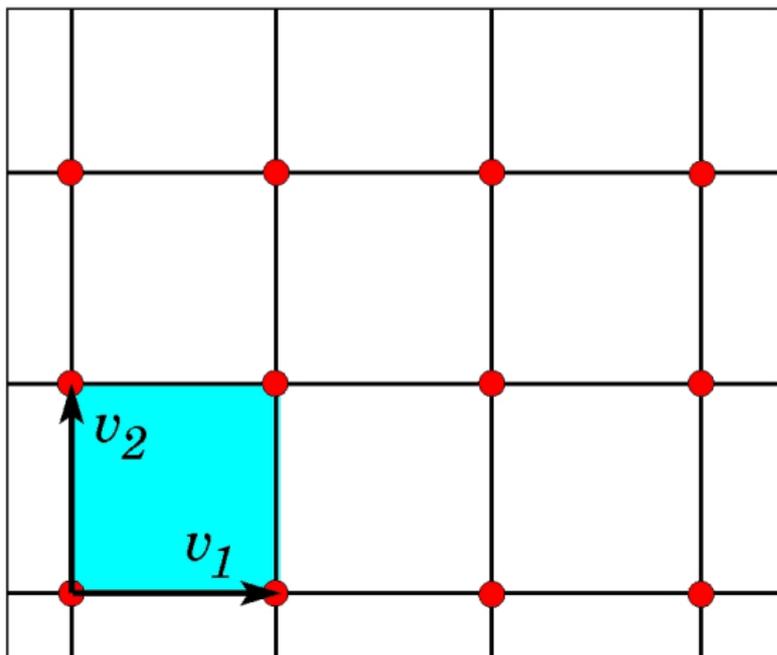


Figure: Tore carré

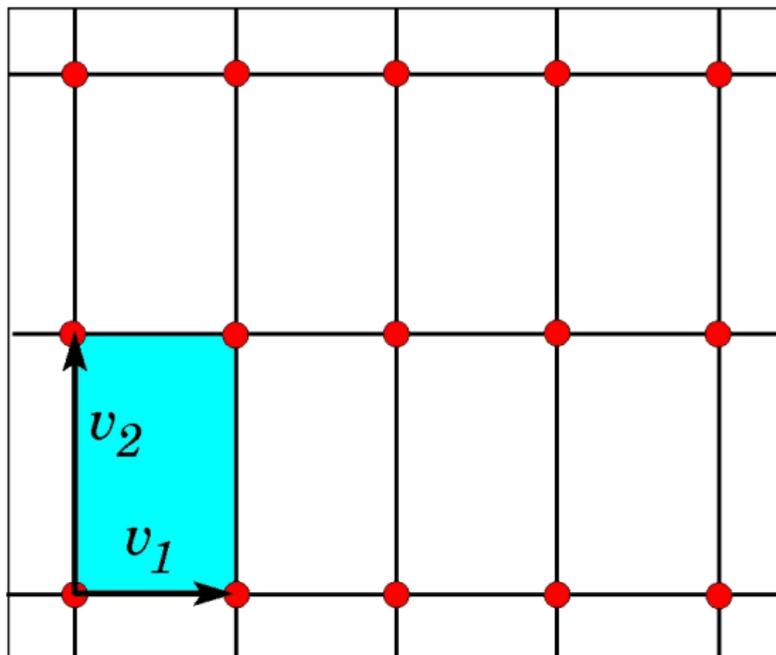


Figure: Tores rectangulaires

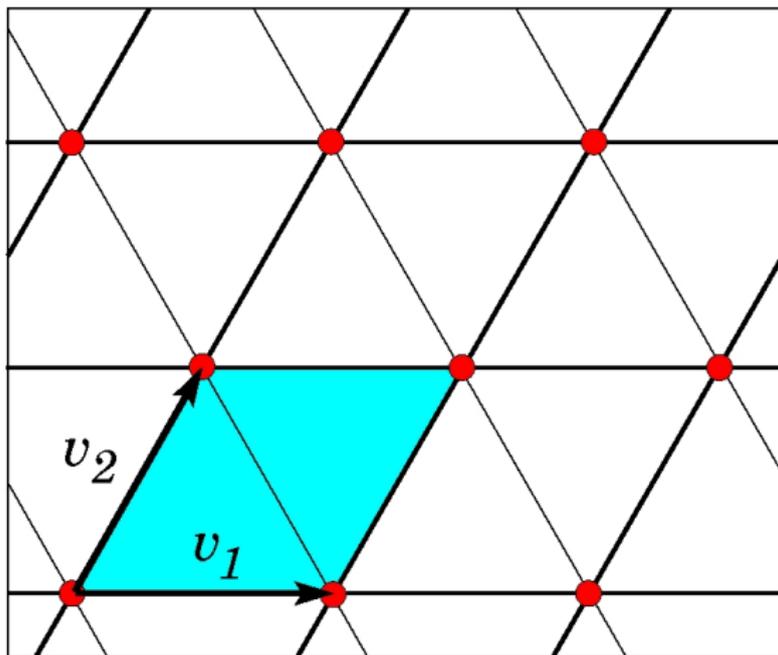


Figure: Tore hexagonal

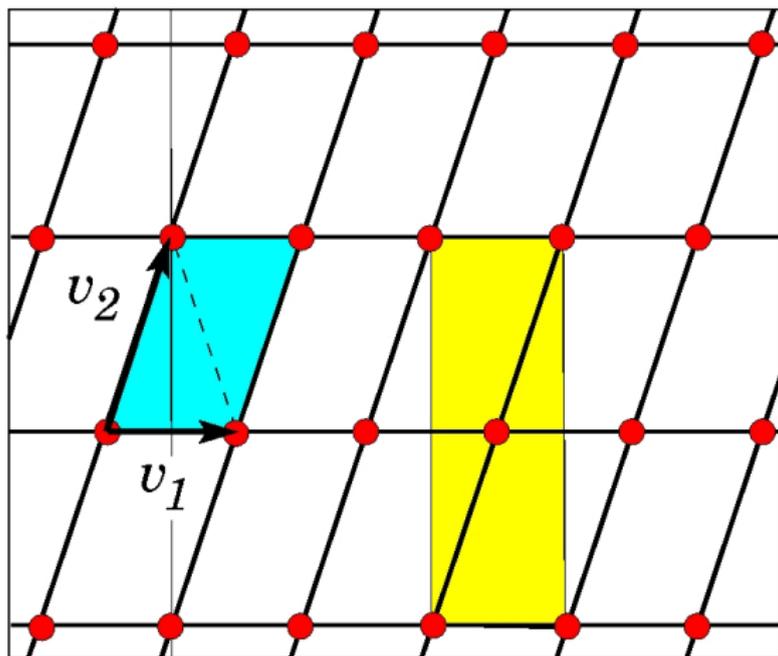


Figure: Tore quelconque

L'espace des modules de tores plats

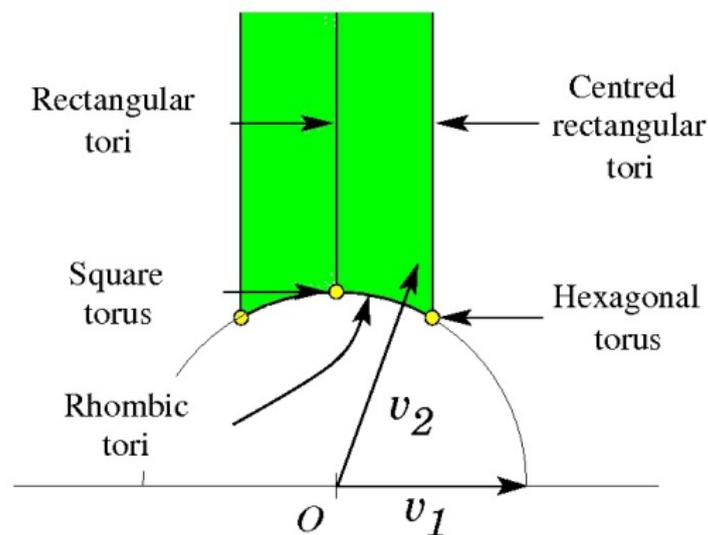


Figure: Classes d'équivalence des différents types de tore à isométrie près

Qu'est-ce qu'on sait réaliser?

- ▶ En 1997, Zalgaller réalise des plongements explicites de certains tores rectangles plats, les tores rectangles dits “longs”
- ▶ Longueur/largeur > 2
- ▶ Le nombre minimum de points est 24

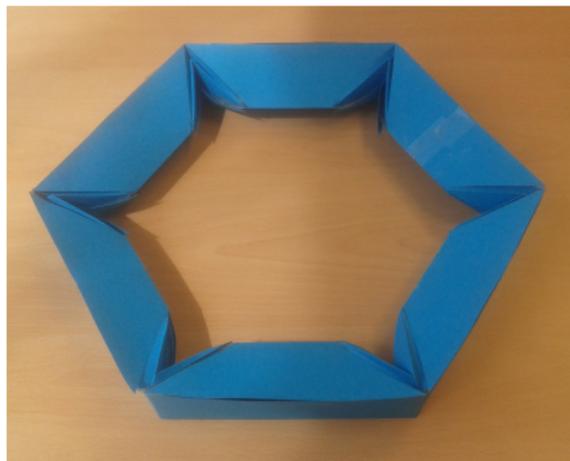


Figure: Modèle de Zalgaller

Réalisation du tore carré plat

Problème: Réaliser les tores rectangles plats courts.

Point de départ: S'inspirer de la théorie de corrugations qui a permis concevoir un plongement isométrique C^1 du tore plat carré.



Figure: Projet Hévée

Theorem

Le tore origamique obtenu à partir du patron précédant est un plongement isométrique du tore carré plat dans \mathbb{R}^3 .

Remarque: Avec le même type de triangulation on peut réaliser tous les tores rectangulaires.

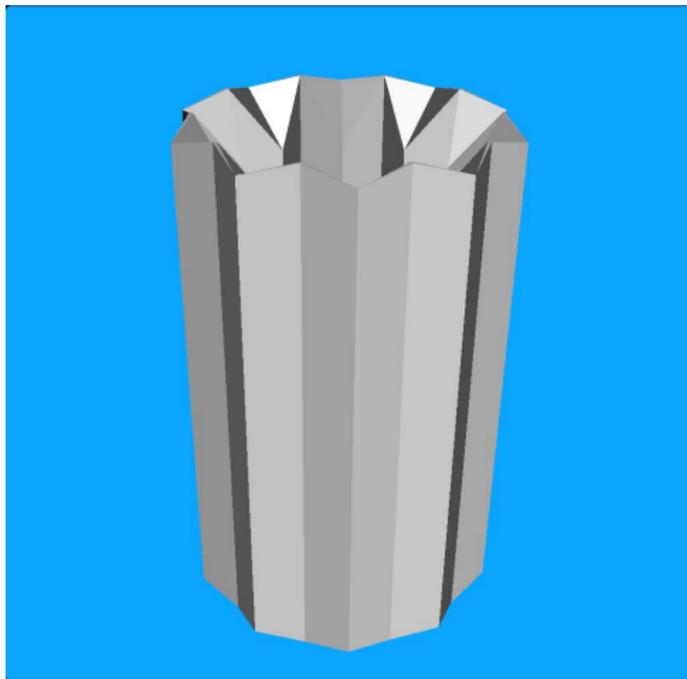


Figure: Tore carré à 72 points

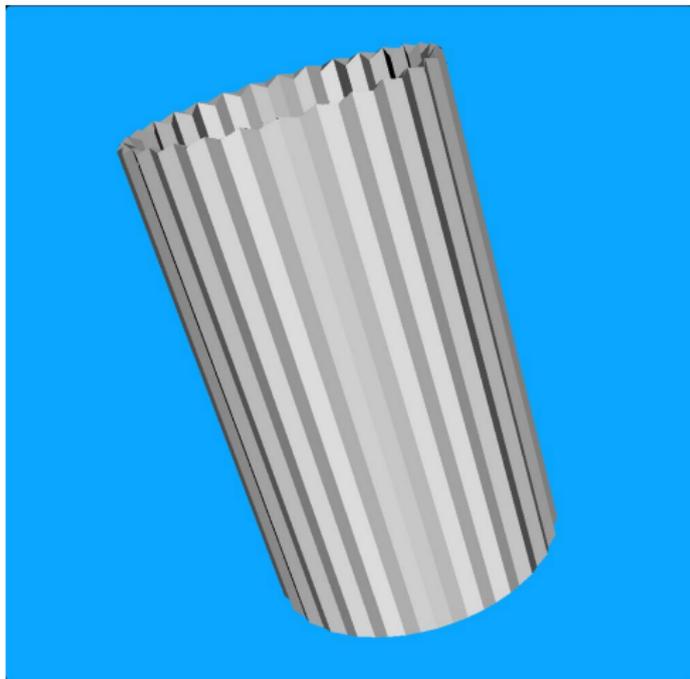


Figure: Tore carré à 240 points

Tore plat et tore de Csaczar

Peut on connaître le nombre minimum de sommets nécessaires pour avoir un plongement isométrique du tore carré plat?

-Dans ma construction, le nombre minimum de points pour réaliser le tore carré est 48.

-On montre que si on enlève la contrainte d'isométrie, le nombre minimal de sommets nécessaires pour plonger un tore plat est 7 (Csaczar, 1949)

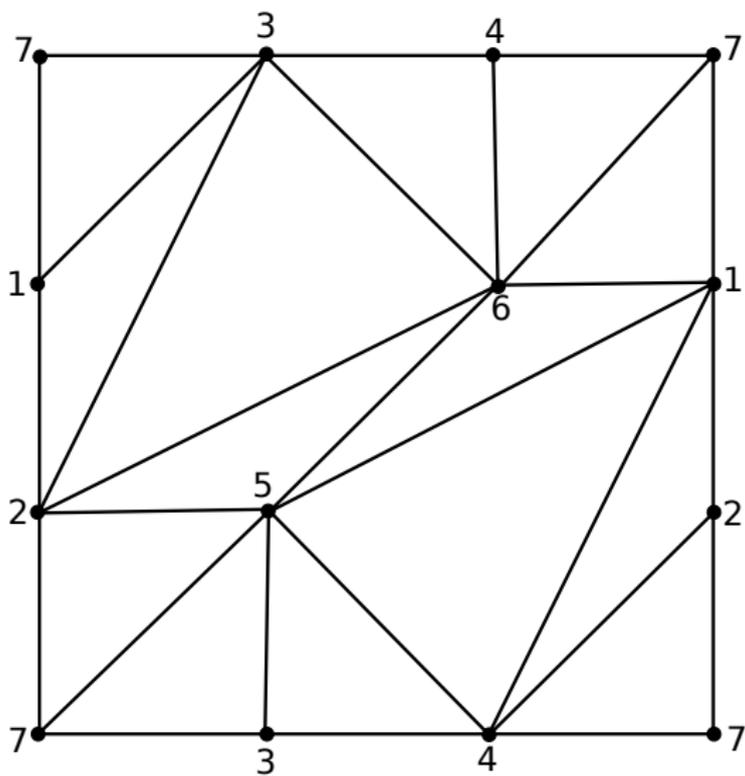


Figure: Patron du tore de Csaczar

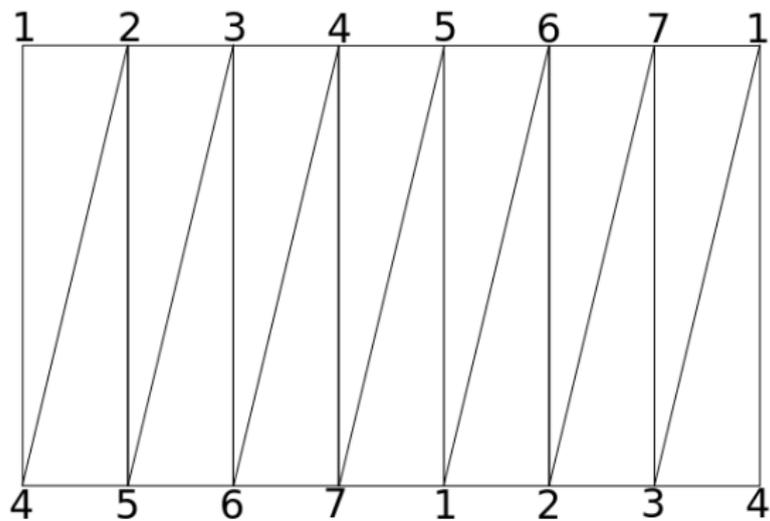
Remarque 1.- La triangulation induite par le pliage de Csaczar fournit un plongement du graphe complet K_7 dans \mathbb{T}^2 .

Remarque 2.- Il y a, à isomorphisme près, qu'une seule façon de plonger K_7 dans \mathbb{R}^3 .

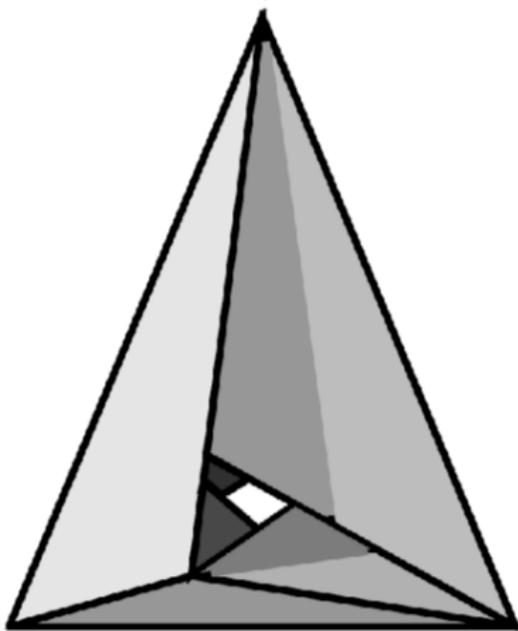
Definition

On appelle *tore de Moebius*, noté M , au complexe simplicial induit par le plongement de K_7 dans le tore \mathbb{T}^2 avec une certaine combinatoire.

Combinatoire du tore de Moebius



Le plongement à sept sommets de Csaczar



Objectif

Montrer que tout plongement isométrique PL de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{E}^3 possède strictement plus de 7 sommets.

Stratégie:

Montrer qu'il n'existe aucun plongement isométrique PL du tore de Moebius dans \mathbb{E}^3

- (A1) Tout plongement PL isométrique de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{E}^3 induit une triangulation géodésique \mathcal{T} de \mathbb{T}^2 (i.e. arête de \mathcal{T} est un segment géodésique de \mathbb{T}^2).
- (A2) On note $GE(M, \mathbb{T}^2)$ l'espace des plongements linéaires de M dans \mathbb{T}^2 , c'est à dire un homéomorphisme qui envoie chaque arête de M dans une géodésique minimisante de \mathbb{T}^2 .
- (A3) Tout plongement PL isométrique de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{E}^3 induit un plongement linéaire isométrique d'un élément \mathcal{T} de $GE(M, \mathbb{T}^2)$.
- (A4) Montrer qu'aucun élément de $GE(M, \mathbb{T}^2)$ admet un plongement linéaire isométrique dans \mathbb{E}^3 .

1. Une description de $GE(M, \mathbb{T}^2)$.

Theorem

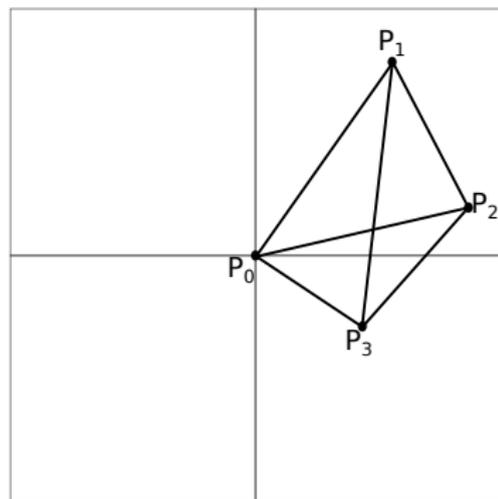
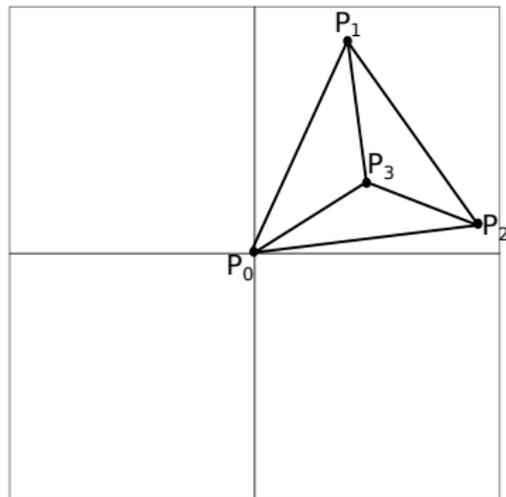
$GE(M, \mathbb{T}^2)$ est une union de produits de la forme $\Delta_1 \times \Delta_2$ où Δ_i est un 6-simplexe.

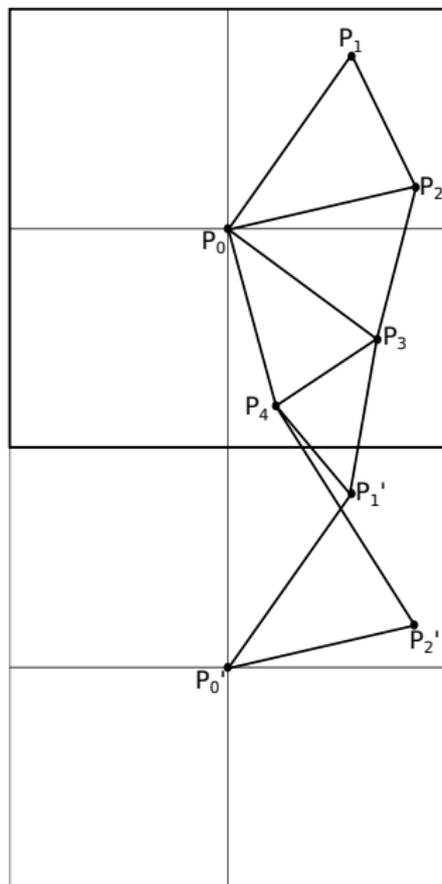
2. Une solution partielle de (A4).

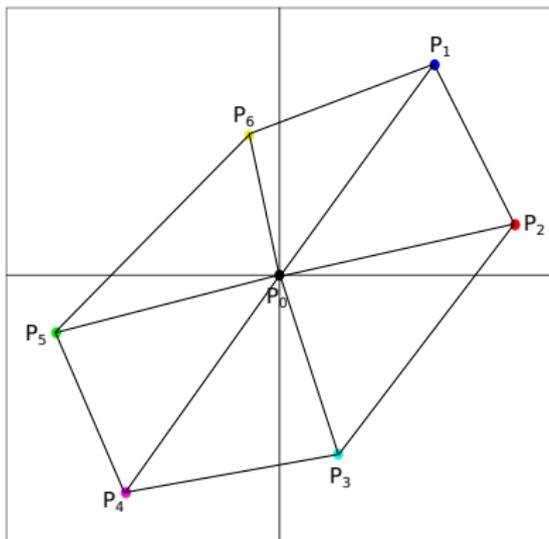
Theorem

Il existe un sous espace E de dimension 6 de $GE(M, \mathbb{T}^2)$ tel qu'aucun élément de E n'admet un plongement linéaire isométrique dans \mathbb{E}^3 .

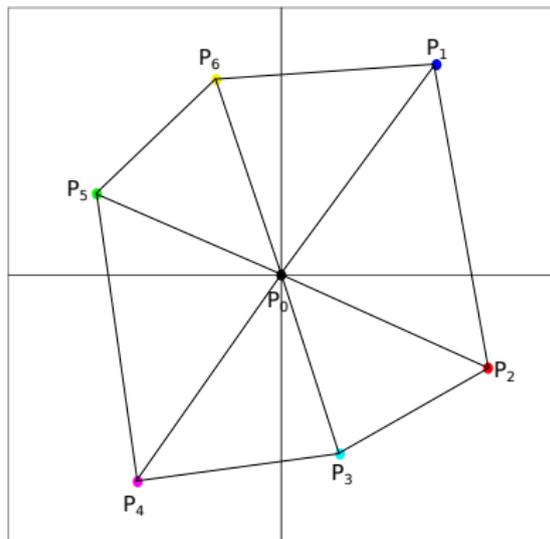
Idée de la preuve de 1.







CONFIGURATION 1



CONFIGURATION 2

On retrouve les contraintes suivantes sur les coordonnées des sommets:

$$1. x_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$2. -\frac{1}{2} \leq x_5$$

$$3. x_4 - x_1 \leq -\frac{1}{2}$$

$$4. x_1 - x_6 \leq \frac{1}{2}$$

$$5. x_6 - x_2 \leq -\frac{1}{2}$$

$$6. x_3 - x_4 \leq \frac{1}{2}$$

$$7. x_5 - x_3 \leq -\frac{1}{2}$$

$$1'. y_1 \leq \frac{1}{2}$$

$$2'. -\frac{1}{2} \leq y_4$$

$$3'. y_5 - y_1 \leq -\frac{1}{2}$$

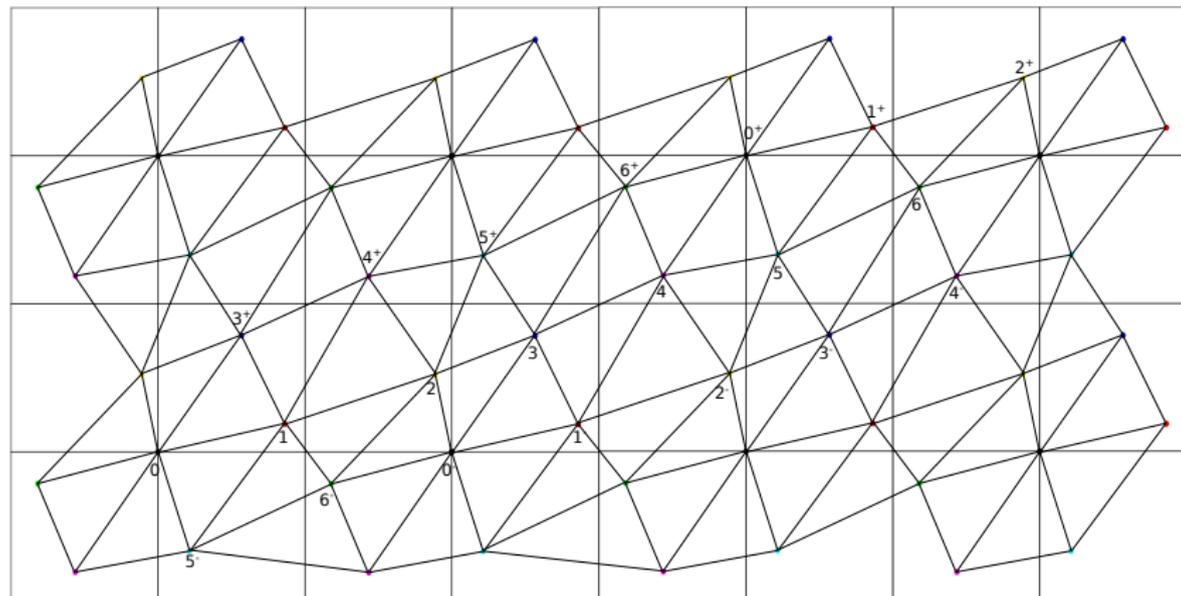
$$4'. y_2 - y_3 \leq \frac{1}{2}$$

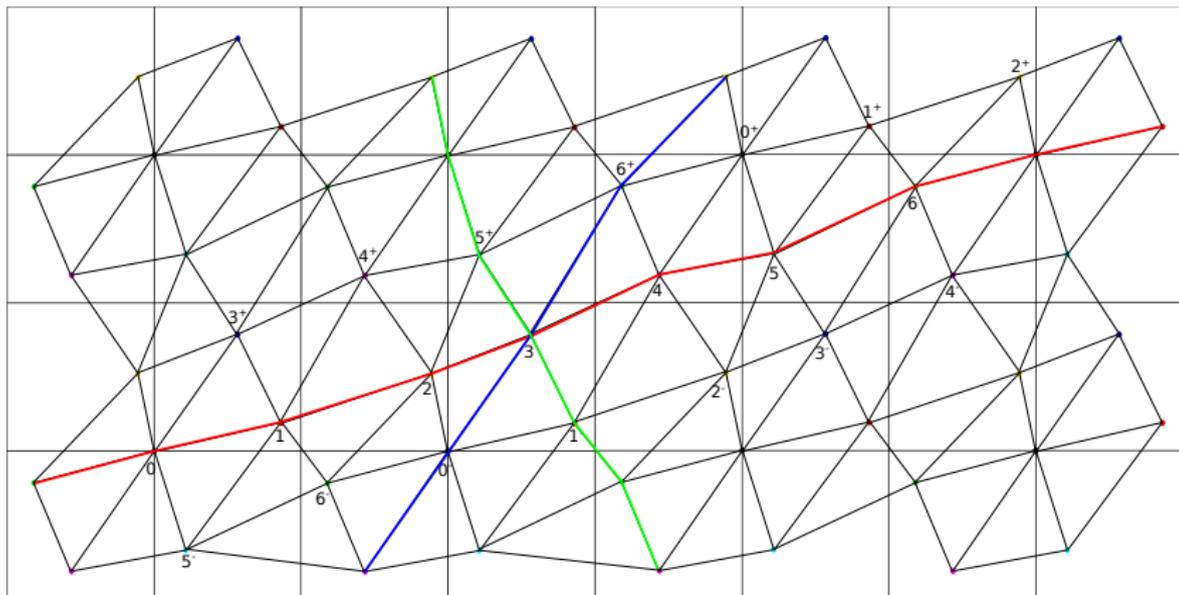
$$5'. y_4 - y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

$$6'. y_3 - y_6 \leq -\frac{1}{2}$$

$$7'. y_6 - y_5 \leq \frac{1}{2}$$

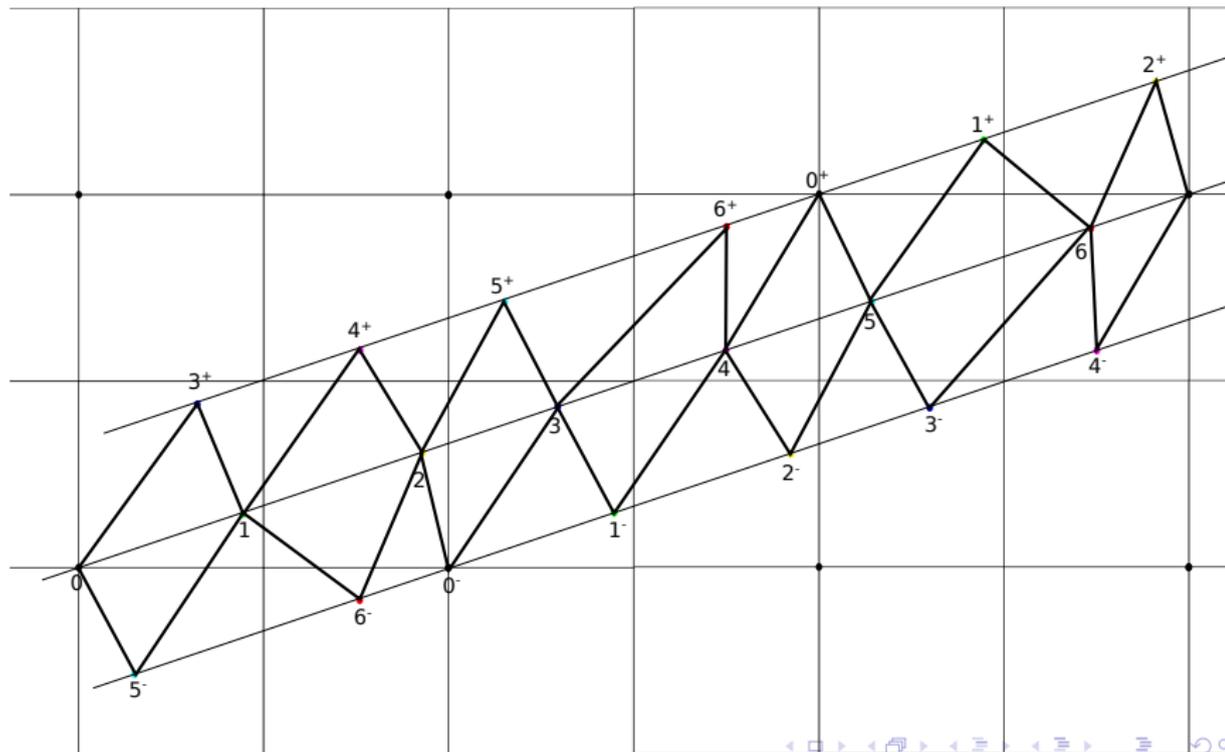
Preuve de 2: Description de E





Definition

E est l'ensemble des triangulations géodésiques tels que les points $\{P_0, P_1, \dots, P_6\}$ sont colinéaires. Cet espace est de dimension 6.



Remarque 1: Si $\{P_0, P_1, \dots, P_6\}$ sont alignés, alors nécessairement $y_i = \frac{1}{3}x_i \forall i = 0, \dots, 6$.

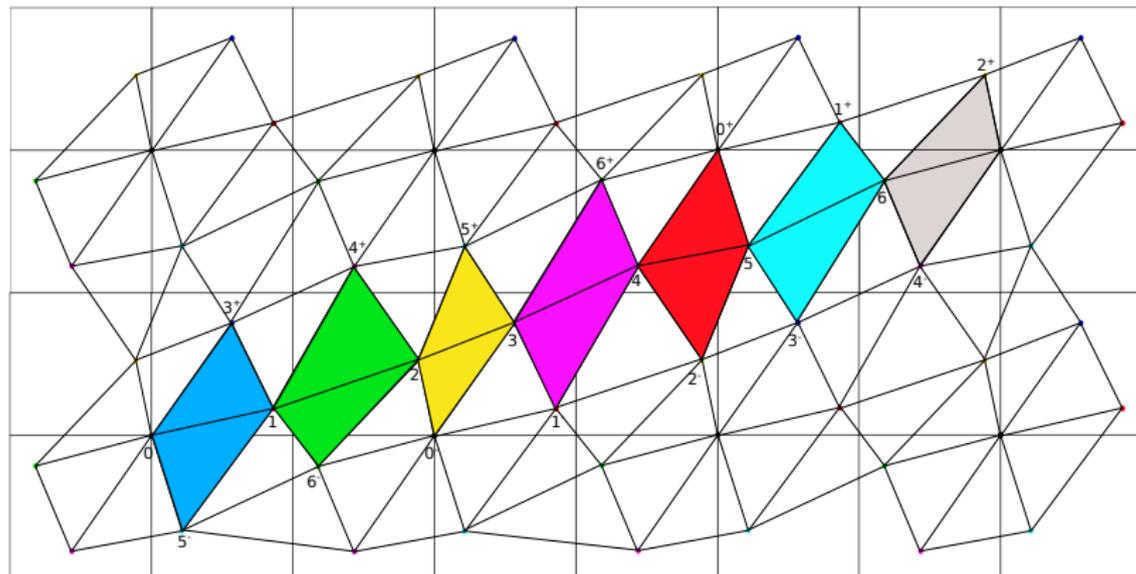
Remarque 2: Dans ce cas particulier, les coordonnées P_i, P_i^+ et P_i^- sont données comme:

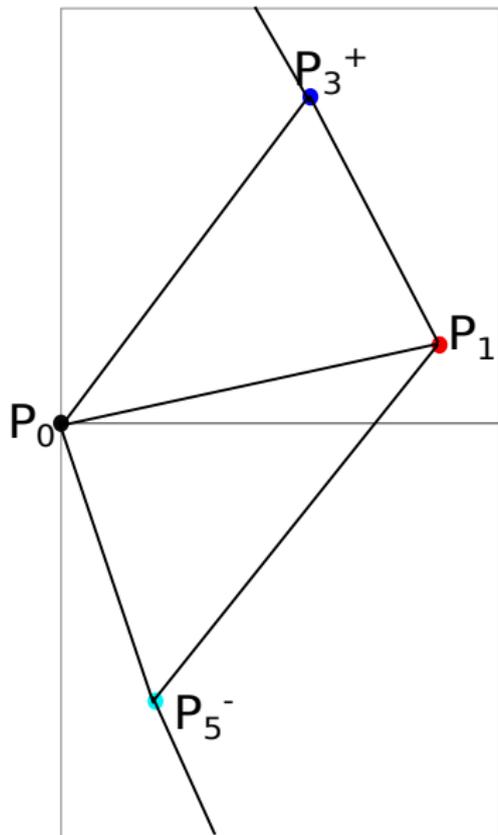
$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i = \frac{1}{3}x_i \end{pmatrix} \quad \forall i = 0, \dots, 6$$

$$P_i^+ = \begin{pmatrix} x_i + 2 \\ y_i + 1 \end{pmatrix} \quad \forall i = 0, 1, 2 \quad P_i^+ = \begin{pmatrix} x_i - 1 \\ y_i \end{pmatrix} \quad \forall i = 3, \dots, 6$$

$$P_i^- = \begin{pmatrix} x_i - 2 \\ y_i - 1 \end{pmatrix} \quad \forall i = 5, 6 \quad P_i^- = \begin{pmatrix} x_i + 1 \\ y_i \end{pmatrix} \quad \forall i = 0, \dots, 4$$

Les papillons





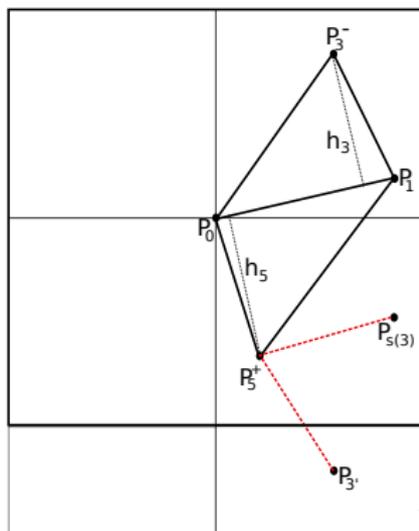
Le coeur de la démonstration repose sur la non-réalisabilité des papillons.

Lemma

Un papillon admet un plongement linéaire isométrique si et seulement si

$$4h_3h_5 + \delta_{3,5} < 0$$

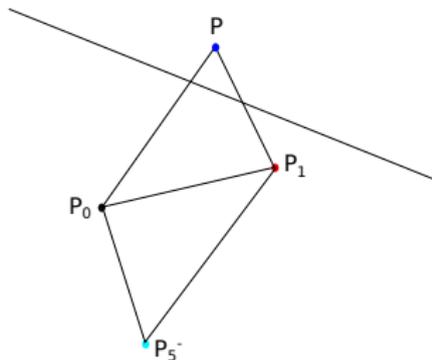
où $\delta_{3,5} = 1 + 2(y_5^- - y_3^+)$.



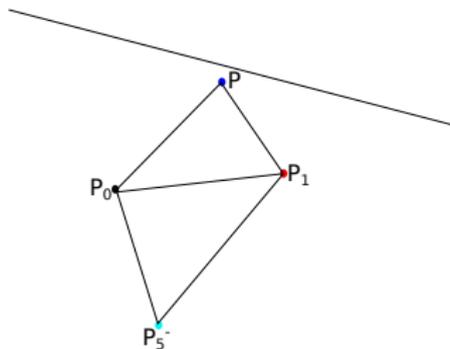
Lemma

Supposons P_0, P_1 et P_5^- donnés et notons (x, y) les coordonnées d'un quatrième point P . Le papillon $P_0P_1P_5^-P$ admet un plongement linéaire isométrique si et seulement si

$$y \leq \frac{(-4x_5^- \sin^2 \theta + 4y_5^- \cos \theta \sin \theta)x + 2y_5^- + 1}{4y_5^- \cos^2 \theta - 4x_5^- \cos \theta \sin \theta + 2}$$



Papillon non réalisable



Papillon réalisable

Corollary

Si les points P_0, P_1, \dots, P_6 sont alignés alors $P_0P_3^+P_1P_5^-$ admet un plongement isométrique linéaire isométrique si et seulement

$$\frac{9}{10} \leq x_5 - x_3$$

Preuve de 2

Si on considère tous les papillons et on applique d'une façon similaire le corollaire précédent, on peut montrer que:

$$(x_2 - x_0) \geq \frac{9}{10}, (x_4 - x_2) \geq \frac{9}{10}, (x_6 - x_4) \geq \frac{9}{10}, (x_1 - x_6 + 3) \geq \frac{9}{10}, (x_3 - x_1) \geq \frac{9}{10}, (x_5 - x_3) \geq \frac{9}{10}, (x_0 + 3 - x_5) \geq \frac{9}{10}.$$

En sommant, on obtient $6 \geq 7 \times \frac{9}{10}$ ce qui est une contradiction.