EDP Stochastiques singulières et modèle parabolique d'Anderson

Antoine MOUZARD

Inter'actions 2019 20-24 Mai

Université de Rennes 1

Table des matières

Introduction

Introduction

On cherche à étudier des EDPS de la forme

$$\partial_t u = \Delta u + f(u, \xi)$$

sur une variété riemannienne, ou plus simplement sur $\mathbb{R}^d$ ou sur le tore $\mathbb{T}^d$ avec ξ un bruit blanc.

Introduction

On cherche à étudier des EDPS de la forme

$$\partial_t u = \Delta u + f(u, \xi)$$

sur une variété riemannienne, ou plus simplement sur $\mathbb{R}^d$ ou sur le tore $\mathbb{T}^d$ avec ξ un bruit blanc. L'exemple le plus simple à garder en tête est le modèle parabolique d'Anderson

$$\text{(PAM)} \quad \partial_t u - \Delta u = u\xi.$$

Introduction

On cherche à étudier des EDPS de la forme

$$\partial_t u = \Delta u + f(u, \xi)$$

sur une variété riemannienne, ou plus simplement sur $\mathbb{R}^d$ ou sur le tore $\mathbb{T}^d$ avec ξ un bruit blanc. L'exemple le plus simple à garder en tête est le modèle parabolique d'Anderson

$$\text{(PAM)} \quad \partial_t u - \Delta u = u\xi.$$

Le problème vient de l'irrégularité de ξ : le produit $u\xi$ n'est pas défini dès que la dimension est trop grande.

Pourquoi des EDPS singulières ?

Pourquoi des EDPS singulières ?

Certaines limites d'échelle continues de modèles aléatoires discrets donnent naissance à des EDPS singulières, l'exemple le plus classique étant (gKPZ) donné par

$$\partial_t u = \Delta u + f(u)\xi + g(u)(\partial u)^2$$

en dimension 1 avec ξ un bruit blanc espace-temps.

Pourquoi des EDPS singulières ?

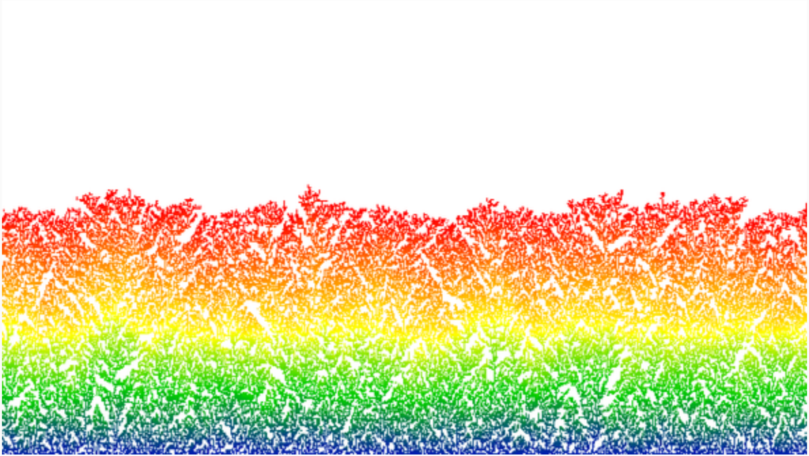
Certaines limites d'échelle continues de modèles aléatoires discrets donnent naissance à des EDPS singulières, l'exemple le plus classique étant (gKPZ) donné par

$$\partial_t u = \Delta u + f(u)\xi + g(u)(\partial u)^2$$

en dimension 1 avec ξ un bruit blanc espace-temps.

L'équation limite est mal posée car le modèle discret ne converge pas naturellement et nécessite une renormalisation pour obtenir une limite non triviale.

Modèle de croissance de surface KPZ



Pourquoi des EDPS singulières ?

En théorie quantique des champs, les physciens cherchent à construire des mesures qui n'ont pas naturellement de sens mathématiques, par exemple le modèle Φ^4_d donné par

$$\mu(\mathrm{d}\phi) = \frac{1}{Z}\mathsf{exp}\left(\int_M \left(|\nabla\phi(x)|^2 - \frac{1}{2}\phi(x)^4 + \phi(x)^2\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\phi.$$

Pourquoi des EDPS singulières ?

En théorie quantique des champs, les physciens cherchent à construire des mesures qui n'ont pas naturellement de sens mathématiques, par exemple le modèle Φ_d^4 donné par

$$\mu(\mathrm{d}\phi) = \frac{1}{Z}\mathsf{exp}\left(\int_M \left(|\nabla\phi(x)|^2 - \frac{1}{2}\phi(x)^4 + \phi(x)^2\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\phi.$$

En considérant un problème dynamique qui admet μ comme mesure invariante, on obtient des EDPS singulières. L'équation de ce modèle est

$$\partial_t\Phi = \Delta\Phi - \Phi^3 + \Phi - \xi$$

en dimension d avec ξ un bruit blanc spatial.

Pourquoi des EDPS singulières ?

En théorie quantique des champs, les physciens cherchent à construire des mesures qui n'ont pas naturellement de sens mathématiques, par exemple le modèle Φ^4_d donné par

$$\mu(\mathrm{d}\phi) = \frac{1}{Z}\mathsf{exp}\left(\int_M \left(|\nabla\phi(x)|^2 - \frac{1}{2}\phi(x)^4 + \phi(x)^2\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\phi.$$

En considérant un problème dynamique qui admet μ comme mesure invariante, on obtient des EDPS singulières. L'équation de ce modèle est

$$\partial_t\Phi = \Delta\Phi - \Phi^3 + \Phi - \xi$$

en dimension d avec ξ un bruit blanc spatial. Renormalisation ?

Régularisation et renormalisation

On peut régulariser le bruit et considérer l'équation bien posée

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + f(u_\varepsilon, \xi_\varepsilon).$$

La singularité se traduit par la divergence de u_ε. Il faut alors trouver une renormalisation **naturelle** v_ε qui converge vers une limite non triviale.

Régularisation et renormalisation

On peut régulariser le bruit et considérer l'équation bien posée

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + f(u_\varepsilon, \xi_\varepsilon).$$

La singularité se traduit par la divergence de u_ε. Il faut alors trouver une renormalisation **naturelle** v_ε qui converge vers une limite non triviale. En particulier, elle doit vérifier une équation modifiée

$$\partial_t v_\varepsilon = \Delta v_\varepsilon + f_\varepsilon(v_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$$

et une forme de continuité par rapport aux paramètres.

Rough path, EDS et EDPS

Intégrale stochastique

Pour définir une opération sur un objet aléatoire, il n'y a pas de problème si l'opération est bien définie pour presque tout $\omega \in \Omega$. Dans le cas des processus stochastique, la régularité du processus détermine souvent quelles opérations sont possibles.

Intégrale stochastique

Pour définir une opération sur un objet aléatoire, il n'y a pas de problème si l'opération est bien définie pour presque tout $\omega \in \Omega$. Dans le cas des processus stochastique, la régularité du processus détermine souvent quelles opérations sont possibles.

Par exemple, on peut définir sans problème $(B_t^2)_{t\geq 0}$ étant donné un mouvement brownien B, mais on ne peut pas définir

$$\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}B_s$$

même pour f régulière avec seulement des outils d'analyse, ici l'intégrale de Young.

Rough path

Étant donnée une fonction X, une solution Y à l'équation

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t)\mathrm{d}X_t$$

doit ressembler localement à X. L'idée des rough path est qu'on peut intégrer contre X une fonction qui "ressemble localement" à X si l'on sait intégrer X contre lui-même.

Rough path

Étant donnée une fonction X, une solution Y à l'équation

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t)\mathrm{d}X_t$$

doit ressembler localement à X. L'idée des rough path est qu'on peut intégrer contre X une fonction qui "ressemble localement" à X si l'on sait intégrer X contre lui-même.
Par exemple, $f(X)$ ressemble localement à X pour f régulière.
Plus généralement, on parle de chemins Y contrôlés par X s'il existe une autre fonction Y' telle que

$$Y_t - Y_s = Y'_s(X_t - X_s) + R_{s,t}.$$

Rough path

Étant donnée une fonction X, une solution Y à l'équation

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t)\mathrm{d}X_t$$

doit ressembler localement à X. L'idée des rough path est qu'on peut intégrer contre X une fonction qui "ressemble localement" à X si l'on sait intégrer X contre lui-même.
Par exemple, $f(X)$ ressemble localement à X pour f régulière.
Plus généralement, on parle de chemins Y contrôlés par X s'il existe une autre fonction Y' telle que

$$Y_t - Y_s = Y'_s(X_t - X_s) + R_{s,t}.$$

On construit à partir de $(B_t)_{t\geq 0}$ un rough path $(\mathbf{B}_t)_{t\geq 0}$ pour lequel on dispose d'une théorie d'intégration déterministe.

EDPS singulières

Si on peut mutliplier deux distributions Z et ξ, on peut multiplier ξ avec une distribution u qui "ressemble localement" à Z. Comment interpréter "ressemble localement" ?

EDPS singulières

Si on peut mutliplier deux distributions Z et ξ, on peut multiplier ξ avec une distribution u qui "ressemble localement" à Z. Comment interpréter "ressemble localement" ?

- **les structures de régularité** : on généralise la notion de régularité en considérant des distributions de base en plus des polynômes. (M. Hairer)

EDPS singulières

Si on peut mutliplier deux distributions Z et ξ, on peut multiplier ξ avec une distribution u qui "ressemble localement" à Z. Comment interpréter "ressemble localement" ?

- **les structures de régularité** : on généralise la notion de régularité en considérant des distributions de base en plus des polynômes. (M. Hairer)
- **le calcul paracontrôlé** : on décompose formellement le produit de deux distributions avec des outils d'analyse harmonique et on cherche des solutions paracontrolées par des distributions de base. (M. Gubinelli, P. Imkeller et N. Perkowski)

Calcul paracontrôlé

Paraproduit et Fourier

On peut considérer la décomposition de Paley-Littlewood de deux distributions $f, g \in \mathscr{S}'$ et formellement écrire le produit

$$fg = \sum_{n,m \geq 0} f_n g_m$$

où les fonctions f_n et g_m sont C^∞ et localisées en fréquence.

Paraproduit et Fourier

On peut considérer la décomposition de Paley-Littlewood de deux distributions $f, g \in \mathscr{S}'$ et formellement écrire le produit

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{n,m \geq 0} f_n g_m \\ &= \sum_{n \leq m+2} f_n g_m + \sum_{|n-m| \leq 1} f_n g_m + \sum_{n \geq m+2} f_n g_m \end{aligned}$$

où les fonctions f_n et g_m sont C^∞ et localisées en fréquence.

Paraproduit et Fourier

On peut considérer la décomposition de Paley-Littlewood de deux distributions $f, g \in \mathscr{S}'$ et formellement écrire le produit

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{n,m\geq 0} f_n g_m \\ &= \sum_{n\leq m+2} f_n g_m + \sum_{|n-m|\leq 1} f_n g_m + \sum_{n\geq m+2} f_n g_m \\ &= \Pi_f g \quad + \quad \Pi(f,g) \quad + \quad \Pi_g f \end{aligned}$$

où les fonctions f_n et g_m sont C^∞ et localisées en fréquence.

Espaces de Hölder

Un bon cadre pour étudier ces équations est celui des espaces de Hölder pour des indices $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition

On définit l'espace $\mathscr{C}^\alpha$ *comme l'espace des distributions* $f \in \mathscr{S}'$ *telles que*

$$\|f\|_{C^\alpha} := \sup_{n \geq 0} \left\{ 2^{\alpha n} \|f_n\|_\infty \right\} < \infty$$

où $(f_n)_{n \geq 0}$ *est la décomposition de Paley-Littlewood de* f*.*

Espaces de Hölder

Un bon cadre pour étudier ces équations est celui des espaces de Hölder pour des indices $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition

On définit l'espace $\mathscr{C}^\alpha$ *comme l'espace des distributions* $f \in \mathscr{S}'$ *telles que*

$$\|f\|_{C^\alpha} := \sup_{n \geq 0} \left\{ 2^{\alpha n} \|f_n\|_\infty \right\} < \infty$$

où $(f_n)_{n \geq 0}$ *est la décomposition de Paley-Littlewood de* f*.*

Le bruit blanc spatial sur $\mathbb{T}^d$ est $\mathscr{C}^{-\frac{d}{2}-\kappa}$ pour tout $\kappa > 0$.

On peut définir le produit de deux distributions si elles sont assez régulières.

Théorème

Soient $\alpha < 0 < \beta$ *tels que* $\alpha + \beta > 0$*. Alors on peut étendre la multiplication de fonctions régulières* $(f, g) \mapsto fg$ *en une application bilinéaire continue de* $\mathscr{C}^\alpha \times \mathscr{C}^\beta$ *dans* $\mathscr{C}^\alpha$*.*

Espaces de Hölder

On peut définir le produit de deux distributions si elles sont assez régulières.

Théorème

Soient $\alpha < 0 < \beta$ tels que $\alpha + \beta > 0$. Alors on peut étendre la multiplication de fonctions régulières $(f, g) \mapsto fg$ en une application bilinéaire continue de $\mathscr{C}^\alpha \times \mathscr{C}^\beta$ dans $\mathscr{C}^\alpha$.

On utilise la décomposition

$$fg = \Pi_f g + \Pi(f, g) + \Pi_g f = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + (\alpha).$$

De plus, la condition $\alpha + \beta > 0$ est nécessaire **uniquement pour le terme résonnant** $\Pi(f, g)$.

Paraproduit et équation de la chaleur

On considère le semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t\geq 0}$. Pour toute distribution $f \in \mathscr{S}'$, on a

$$f = \lim_{t\to 0} P_t f = \int_0^1 -(\partial_t P_t) f \, \mathrm{d}t + P_1 f =: \int_0^1 Q_t f \frac{\mathrm{d}t}{t} + P_1 f.$$

Paraproduit et équation de la chaleur

On considère le semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t\geq 0}$. Pour toute distribution $f \in \mathscr{S}'$, on a

$$f = \lim_{t\to 0} P_t f = \int_0^1 -(\partial_t P_t) f \,\mathrm{d}t + P_1 f =: \int_0^1 Q_t f \frac{\mathrm{d}t}{t} + P_1 f.$$

On peut définir des paraproduits $\Pi_f g$ et $\Pi(f,g)$ avec la famille d'opérateur $(Q_t)_{t\geq 0}$.

Définition

On définit l'espace $\mathscr{C}^\alpha$ comme l'espace des distributions $f \in \mathscr{S}'$ telles que

$$\|f\|_{C^\alpha} := \|P_1 f\|_\infty + \sup_{t>0} \left\{ t^{-\frac{\alpha}{2}} \|Q_t f\|_\infty \right\} < \infty.$$

Exemples

Pour $\alpha > -1$, la fonction $f(x) = x^\alpha$ est dans $\mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}_+^*)$ car

$$\begin{aligned}\Big|Q_t(y \mapsto y^\alpha)\Big|(y) &\leq \int_0^\infty |x|^\alpha \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \mathrm{d}x \\ &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \mathrm{d}x \\ &\lesssim t^{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

Exemples

Pour $\alpha > -1$, la fonction $f(x) = x^\alpha$ est dans $\mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}_+^*)$ car

$$\begin{aligned}
\Big|Q_t(y \mapsto y^\alpha)\Big|(y) &\leq \int_0^\infty |x|^\alpha \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \mathrm{d}x \\
&\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{t}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \mathrm{d}x \\
&\lesssim t^{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

La distribution δ_0 est dans $\mathscr{C}^{-d}(\mathbb{R}^d)$ car

$$\begin{aligned}
(Q_t \delta_0)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \delta_0(\mathrm{d}x) &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \\
&\lesssim t^{-\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

Description paracontrôlée

On cherche une solution de la forme

$$u = \Pi_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ ne dépendant que du bruit ξ, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$.

Description paracontrôlée

On cherche une solution de la forme

$$u = \Pi_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ ne dépendant que du bruit ξ, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$.
On écrit alors la non-linéarité sous la forme $f(u, \xi) = \Pi_{v'} Y + v^\sharp$ et on considère comme solution le point fixe de

$$u = Pu_0 + \mathscr{L}^{-1}(\Pi_{v'} Y) + \mathscr{L}^{-1} v^\sharp.$$

Description paracontrôlée

On cherche une solution de la forme

$$u = \Pi_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ ne dépendant que du bruit ξ, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$. On écrit alors la non-linéarité sous la forme $f(u, \xi) = \Pi_{v'} Y + v^\sharp$ et on considère comme solution le point fixe de

$$u = Pu_0 + \mathscr{L}^{-1}(\Pi_{v'} Y) + \mathscr{L}^{-1} v^\sharp.$$

En étudiant le commutateur $[\mathscr{L}^{-1}, \Pi_{u'}]$, on peut montrer qu'on a alors un espace stable et qu'on peut appliquer un théorème de point fixe.

Description paracontrôlée d'ordre supérieur

On cherche une solution de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{\Pi}_{u_i} Z_i + u^\sharp$$

avec $u_i \in \mathscr{C}^\alpha$, les $Z_i \in \mathscr{C}^{i\alpha}$ ne dépendant que du bruit et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{(n+1)\alpha}$.

Description paracontrôlée d'ordre supérieur

On cherche une solution de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{u_i} Z_i + u^\sharp$$

avec $u_i \in \mathscr{C}^\alpha$, les $Z_i \in \mathscr{C}^{i\alpha}$ ne dépendant que du bruit et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{(n+1)\alpha}$. On considère comme solution un point fixe de

$$u = Pu_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathscr{L}^{-1}(\Pi_{v_i} Y_i) + \mathscr{L}^{-1} v^\sharp.$$

L'étude du commutateur $[\mathscr{L}^{-1}, \Pi_{u'}]$ ne suffit plus.

Paraproduits conjugués

On introduit un nouveau paraproduit $\widetilde{\Pi}$ défini par

$$\widetilde{\Pi} = \mathscr{L}^{-1} \circ \Pi \circ \mathscr{L}.$$

Paraproduits conjugués

On introduit un nouveau paraproduit $\widetilde{\Pi}$ défini par

$$\widetilde{\Pi} = \mathscr{L}^{-1} \circ \Pi \circ \mathscr{L}.$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Pi}_{u_i} Z_i + u^\sharp$$

Paraproduits conjugués

On introduit un nouveau paraproduit $\widetilde{\Pi}$ défini par

$$\widetilde{\Pi} = \mathscr{L}^{-1} \circ \Pi \circ \mathscr{L}.$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Pi}_{u_i} Z_i + u^\sharp$$

et on écrit la non-linéarité sous la forme

$$f(u, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{v_i} Y_i + v^\sharp$$

avec les relations $Z_i = \mathscr{L}^{-1} Y_i$ pour avoir un espace stable.

Résolution d'EDPS singulières

Pour étudier une non-linéarité, il faut utiliser différents opérateurs de corrections/commutations. Par exemple, on considère pour (gPAM) les opérateurs

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}(a,b,c) &:= \Pi(\widetilde{\Pi}_a b, c) - a\Pi(b,c), \\
\mathsf{D}(a,b,c) &:= \Pi(\widetilde{\Pi}_a b, c) - \Pi_a \Pi(b,c), \\
\mathsf{S}(a,b,c) &:= \Pi_a \widetilde{\Pi}_b c - \Pi_v \Pi_a c, \\
\mathsf{R}(a,b,c) &:= \Pi_a \widetilde{\Pi}_b c - \Pi_{ab} c
\end{aligned}$$

et on a des estimées de continuité de $\mathscr{C}^\alpha \times \mathscr{C}^\beta \times \mathscr{C}^\gamma$ dans $\mathscr{C}^{\delta(\alpha,\beta,\gamma)}$.

Modèle parabolique d'Anderson

On considère l'équation (PAM)

$$\partial_t u - \Delta u = u\xi$$

avec ξ un bruit blanc spatial de régularité $-\frac{d}{2} - \kappa$ avec $\kappa > 0$.

Modèle parabolique d'Anderson

On considère l'équation (PAM)

$$\partial_t u - \Delta u = u\xi$$

avec ξ un bruit blanc spatial de régularité $-\frac{d}{2} - \kappa$ avec $\kappa > 0$. La solution u devrait être de régularité $2 - \frac{d}{2} - \kappa$ et la condition pour que le produit $u\xi$ soit bien défini est

$$\Big(-\frac{d}{2} - \kappa + 2 - \frac{d}{2} - \kappa > 0 \Big) \iff \Big(d < 2 \Big).$$

Modèle parabolique d'Anderson

On considère l'équation (PAM)

$$\partial_t u - \Delta u = u\xi$$

avec ξ un bruit blanc spatial de régularité $-\frac{d}{2} - \kappa$ avec $\kappa > 0$. La solution u devrait être de régularité $2 - \frac{d}{2} - \kappa$ et la condition pour que le produit $u\xi$ soit bien défini est

$$\Big(-\frac{d}{2} - \kappa + 2 - \frac{d}{2} - \kappa > 0\Big) \iff \Big(d < 2\Big).$$

L'EDPS est **singulière** dès que la dimension est plus grande que 2.

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 2, une description à l'ordre 1 suffit. On considère une distribution paracontrôlée

$$u = \widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ une fonction du bruit à déterminer, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$.

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 2, une description à l'ordre 1 suffit. On considère une distribution paracontrôlée

$$u = \widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ une fonction du bruit à déterminer, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$. On a

$$u\xi = \Pi_u \xi + \Pi_\xi u + \Pi(u, \xi)$$

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 2, une description à l'ordre 1 suffit. On considère une distribution paracontrôlée

$$u = \widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ une fonction du bruit à déterminer, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} u\xi &= \Pi_u \xi + \Pi_\xi u + \Pi(u, \xi) \\ &= \Pi_u \xi + \Pi_\xi(\widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp) + \Pi(\widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp, \xi) \end{aligned}$$

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 2, une description à l'ordre 1 suffit. On considère une distribution paracontrôlée

$$u = \widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp$$

avec $Z \in \mathscr{C}^\alpha$ une fonction du bruit à déterminer, $u' \in \mathscr{C}^\alpha$ et $u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} u\xi &= \Pi_u \xi + \Pi_\xi u + \Pi(u, \xi) \\ &= \Pi_u \xi + \Pi_\xi(\widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp) + \Pi(\widetilde{\Pi}_{u'} Z + u^\sharp, \xi) \\ &= \Pi_u \xi \\ &\quad + \Pi_{u'} \Pi_\xi Z + u' \Pi(Z, \xi) \\ &\quad + \mathsf{D}(u', Z, \xi) + \mathsf{C}(u', Z, \xi) + \Pi_\xi u^\sharp + \Pi(u^\sharp, \xi) \end{aligned}$$

Modèle parabolique d'Anderson

En particulier, on peut réécrire l'équation

$$\mathscr{L} u = \Pi_u \xi + (2\alpha - 2)$$

ce qui donne

$$u = \widetilde{\Pi}_u \mathscr{L}^{-1} \xi + (2\alpha)$$

Modèle parabolique d'Anderson

En particulier, on peut réécrire l'équation

$$\mathscr{L} u = \mathsf{\Pi}_u \xi + (2\alpha - 2)$$

ce qui donne

$$u = \widetilde{\mathsf{\Pi}}_u \mathscr{L}^{-1} \xi + (2\alpha)$$

et ainsi on prend $Z := \mathscr{L}^{-1} \xi$.

Modèle parabolique d'Anderson

En particulier, on peut réécrire l'équation

$$\mathscr{L}u = \Pi_u \xi + (2\alpha - 2)$$

ce qui donne

$$u = \widetilde{\Pi}_u \mathscr{L}^{-1}\xi + (2\alpha)$$

et ainsi on prend $Z := \mathscr{L}^{-1}\xi$. On peut alors formuler l'équation via un point fixe sur l'espace

$$\mathscr{D}^{2\alpha}(Z) := \left\{ u = \Pi_{u'} Z + u^\sharp \ ;\ u' \in \mathscr{C}^\alpha \text{ et } u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha} \right\}$$

Modèle parabolique d'Anderson

En particulier, on peut réécrire l'équation

$$\mathscr{L}u = \Pi_u \xi + (2\alpha - 2)$$

ce qui donne

$$u = \widetilde{\Pi}_u \mathscr{L}^{-1}\xi + (2\alpha)$$

et ainsi on prend $Z := \mathscr{L}^{-1}\xi$. On peut alors formuler l'équation via un point fixe sur l'espace

$$\mathscr{D}^{2\alpha}(Z) := \left\{ u = \Pi_{u'} Z + u^\sharp \ ;\ u' \in \mathscr{C}^\alpha \text{ et } u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha} \right\}$$

pour obtenir une unique solution **dans cet espace** en partant d'une condition intiale paracontrôlée

Modèle parabolique d'Anderson

En particulier, on peut réécrire l'équation

$$\mathscr{L}u = \mathsf{\Pi}_u\xi + (2\alpha - 2)$$

ce qui donne

$$u = \widetilde{\mathsf{\Pi}}_u\mathscr{L}^{-1}\xi + (2\alpha)$$

et ainsi on prend $Z := \mathscr{L}^{-1}\xi$. On peut alors formuler l'équation via un point fixe sur l'espace

$$\mathscr{D}^{2\alpha}(Z) := \Big\{u = \mathsf{\Pi}_{u'}Z + u^\sharp \ ; \ u' \in \mathscr{C}^\alpha \text{ et } u^\sharp \in \mathscr{C}^{2\alpha}\Big\}$$

pour obtenir une unique solution **dans cet espace** en partant d'une condition intiale paracontrôlée qui dépend **continûment** de $(\xi, \mathsf{\Pi}(Z,\xi))$.

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 3, il faut un développement à l'ordre 2. On peut le lire dans l'expression du reste de la dimension 2.

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 3, il faut un développement à l'ordre 2. On peut le lire dans l'expression du reste de la dimension 2. En effet,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u = {} & \mathsf{\Pi}_u \xi \\ & + \mathsf{\Pi}_{u'} \mathsf{\Pi}_\xi Z + u' \mathsf{\Pi}(Z, \xi) \\ & + \mathsf{D}(u', Z, \xi) + \mathsf{C}(u', Z, \xi) + \mathsf{\Pi}_\xi u^\sharp + \mathsf{\Pi}(u^\sharp, \xi)\end{aligned}$$

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 3, il faut un développement à l'ordre 2. On peut le lire dans l'expression du reste de la dimension 2. En effet,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u = &\ \mathsf{\Pi}_u\xi \\ &+ \mathsf{\Pi}_{u'}\mathsf{\Pi}_\xi Z + u'\mathsf{\Pi}(Z,\xi) \\ &+ \mathsf{D}(u',Z,\xi) + \mathsf{C}(u',Z,\xi) + \mathsf{\Pi}_\xi u^\sharp + \mathsf{\Pi}(u^\sharp,\xi) \\ = &\ \mathsf{\Pi}_u\xi + \mathsf{\Pi}_{u'}\Big(\mathsf{\Pi}_\xi Z + \mathsf{\Pi}(Z,\xi)\Big) + (3\alpha - 2)\end{aligned}$$

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 3, il faut un développement à l'ordre 2. On peut le lire dans l'expression du reste de la dimension 2. En effet,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u &= \mathsf{\Pi}_u\xi \\ &\quad + \mathsf{\Pi}_{u'}\mathsf{\Pi}_\xi Z + u'\mathsf{\Pi}(Z,\xi) \\ &\quad + \mathsf{D}(u',Z,\xi) + \mathsf{C}(u',Z,\xi) + \mathsf{\Pi}_\xi u^\sharp + \mathsf{\Pi}(u^\sharp,\xi) \\ &= \mathsf{\Pi}_u\xi + \mathsf{\Pi}_{u'}\Big(\mathsf{\Pi}_\xi Z + \mathsf{\Pi}(Z,\xi)\Big) + (3\alpha-2)\end{aligned}$$

donc on cherche une solution sous la forme

$$u = \widetilde{\mathsf{\Pi}}_{u_1} Z + \widetilde{\mathsf{\Pi}}_{u_2}\Big(\mathscr{L}^{-1}(\mathsf{\Pi}_\xi Z + \mathsf{\Pi}(Z,\xi))\Big) + u^\sharp$$

Modèle parabolique d'Anderson

En dimension 3, il faut un développement à l'ordre 2. On peut le lire dans l'expression du reste de la dimension 2. En effet,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u &= \mathsf{\Pi}_u\xi \\ &\qquad + \mathsf{\Pi}_{u'}\mathsf{\Pi}_\xi Z + u'\mathsf{\Pi}(Z,\xi) \\ &\qquad + \mathsf{D}(u',Z,\xi) + \mathsf{C}(u',Z,\xi) + \mathsf{\Pi}_\xi u^\sharp + \mathsf{\Pi}(u^\sharp,\xi) \\ &= \mathsf{\Pi}_u\xi + \mathsf{\Pi}_{u'}\Big(\mathsf{\Pi}_\xi Z + \mathsf{\Pi}(Z,\xi)\Big) + (3\alpha - 2)\end{aligned}$$

donc on cherche une solution sous la forme

$$u = \widetilde{\mathsf{\Pi}}_{u_1} Z + \widetilde{\mathsf{\Pi}}_{u_2}\Big(\mathscr{L}^{-1}(\mathsf{\Pi}_\xi Z + \mathsf{\Pi}(Z,\xi))\Big) + u^\sharp$$

avec $u_1 = \mathsf{\Pi}_{u_{11}} Z + u_1^\sharp$.

Calcul paracontrôlé

1. L'équation et l'irrégularité du bruit nous impose un espace de solutions

$$u = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Pi}_{u_i} Z_i + u^\sharp$$

avec les Z_i des fonctions du bruit de régularité $i\alpha$ ainsi qu'une condition similaire sur les u_i.

Calcul paracontrôlé

1. L'équation et l'irrégularité du bruit nous impose un espace de solutions
$$u = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Pi}_{u_i} Z_i + u^\sharp$$
avec les Z_i des fonctions du bruit de régularité $i\alpha$ ainsi qu'une condition similaire sur les u_i.
2. On en déduit une expression de la non-linéarité de la forme
$$f(u,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{v_i} Y_i + v^\sharp$$
où la famille $(Y_i)_i$ ne dépend que de ξ et des Z_i.

Calcul paracontrôlé

1. L'équation et l'irrégularité du bruit nous impose un espace de solutions
$$u = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Pi}_{u_i} Z_i + u^\sharp$$
avec les Z_i des fonctions du bruit de régularité $i\alpha$ ainsi qu'une condition similaire sur les u_i.
2. On en déduit une expression de la non-linéarité de la forme
$$f(u, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{v_i} Y_i + v^\sharp$$
où la famille $(Y_i)_i$ ne dépend que de ξ et des Z_i.
3. On écrit alors le point fixe avec la condtion $Z_i = \mathscr{L}^{-1} Y_i$.

Aléatoire et renormalisation

Renormalisation et régularisation

Dans le contexte précédent, on a existence et unicité de la solution **une fois construite** la famille de fonctions du bruit $Z_1, \ldots, Z_n$, ce qui est un problème uniquement de **probabilité**.

Renormalisation et régularisation

Dans le contexte précédent, on a existence et unicité de la solution **une fois construite** la famille de fonctions du bruit $Z_1, \dots, Z_n$, ce qui est un problème uniquement de **probabilité**.

Pour cela, on considère une régularisation de l'objet ξ_ε et on étudie le comportement de $Z_i(\varepsilon)$. Si l'objet est mal défini, $Z_i(\varepsilon)$ diverge et on doit soustraire des quantités divergentes.

Renormalisation et régularisation

Dans le contexte précédent, on a existence et unicité de la solution **une fois construite** la famille de fonctions du bruit $Z_1, \ldots, Z_n$, ce qui est un problème uniquement de **probabilité**.

Pour cela, on considère une régularisation de l'objet ξ_ε et on étudie le comportement de $Z_i(\varepsilon)$. Si l'objet est mal défini, $Z_i(\varepsilon)$ diverge et on doit soustraire des quantités divergentes.

Par exemple avec $Z = \mathscr{L}^{-1}\xi$ et sur $\mathbb{T}^d$ avec $d \geq 2$, le produit ξZ est mal posé. On peut voir que l'espérance $\mathbb{E}[Z_\varepsilon \xi_\varepsilon]$ diverge comme $\ln(\varepsilon)$ en dimension 2 et $\frac{1}{\varepsilon^{(d-2)}}$ en dimension $d > 2$.

Renormalisation et régularisation

Dans le contexte précédent, on a existence et unicité de la solution **une fois construite** la famille de fonctions du bruit $Z_1, \ldots, Z_n$, ce qui est un problème uniquement de **probabilité**.

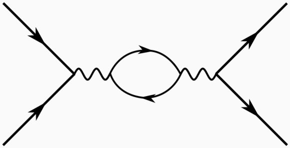
Pour cela, on considère une régularisation de l'objet ξ_ε et on étudie le comportement de $Z_i(\varepsilon)$. Si l'objet est mal défini, $Z_i(\varepsilon)$ diverge et on doit soustraire des quantités divergentes.

Par exemple avec $Z = \mathscr{L}^{-1}\xi$ et sur $\mathbb{T}^d$ avec $d \geq 2$, le produit ξZ est mal posé. On peut voir que l'espérance $\mathbb{E}[Z_\varepsilon \xi_\varepsilon]$ diverge comme $\ln(\varepsilon)$ en dimension 2 et $\frac{1}{\varepsilon^{(d-2)}}$ en dimension $d > 2$. En dimension 2, on peut définir le produit comme

$$Z\xi := \lim_{\varepsilon \to 0} Z_\varepsilon \xi_\varepsilon - \mathbb{E}[Z_\varepsilon \xi_\varepsilon].$$

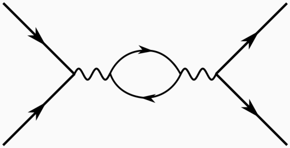
Algèbre de Hopf d'arbres et BPHZ

L'algorithme BPHZ permet d'associer à des diagrammes de Feynmann divergeant une amplitude finie **renormalisée**.

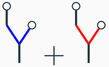


Algèbre de Hopf d’arbres et BPHZ

L’algorithme BPHZ permet d’associer à des diagrammes de Feynmann divergeant une amplitude finie **renormalisée**.



Dans les EDPS singulières, on représente les quantités en terme d’arbres.



Renormalisation et unicité

Le choix pour définir la famille $Z_1, \ldots, Z_n$ n'est pas en général unique. On n'a pas unicité !

Renormalisation et unicité

Le choix pour définir la famille $Z_1, \ldots, Z_n$ n'est pas en général unique. On n'a pas unicité !

C'est un problème classique en dynamique aléatoire. Il y a par exemple une infinité de manière de choisir comment interpréter

$$\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}B_s$$

et on en choisit une selon les propriétés que l'on désire.

Renormalisation et unicité

Le choix pour définir la famille $Z_1, \ldots, Z_n$ n'est pas en général unique. On n'a pas unicité !

C'est un problème classique en dynamique aléatoire. Il y a par exemple une infinité de manière de choisir comment interpréter

$$\int_0^t f(B_s)\mathrm{d}B_s$$

et on en choisit une selon les propriétés que l'on désire.

On cherche à paramétrer l'espace des choix possibles explicitement.

Merci de votre attention !