

Une condition nécessaire de contrôlabilité locale pour une classe particulière de systèmes à deux contrôles

Clément Moreau, Laetitia Giraldi, Pierre Lissy, Jean-Baptiste Pomet

Colloque Inter'Actions

23 mai 2019



Aperçu de la présentation

- ▶ Définitions
- ▶ Résultats de contrôlabilité existants pour des systèmes à contrôle scalaire
- ▶ Nouveau résultat pour des systèmes à deux entrées
- ▶ Applications à des micro-nageurs magnétiques

Introduction

Soit f_0, \dots, f_m des champs de vecteurs analytiques sur \mathbb{R}^n . On considère le système de contrôle affine à m contrôles u_1, \dots, u_m :

$$\dot{z} = f_0(z) + \sum_{k=1}^m u_k f_k(z). \quad (1)$$

- ▶ Étude de la contrôlabilité locale autour d'un état d'équilibre $(z^{\text{eq}}, u^{\text{eq}})$.

Small-Time Local Controllability (STLC)

Définition 1 (STLC)

Le système de contrôle (1) est STLC en (z^{eq}, u^{eq}) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous z_0, z_1 dans $B(z^{eq}, \eta)$, il existe des contrôles

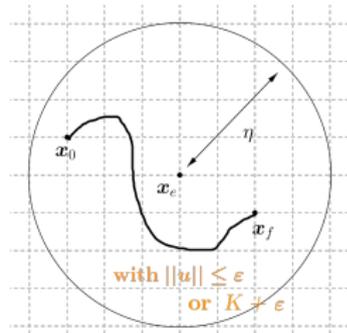
$u(\cdot) = (u_1, \dots, u_m)$ dans $L^\infty([0, \varepsilon])$ telle que la solution $z(\cdot) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système (1) vérifie $z(0) = z_0$, $z(\varepsilon) = z_1$, et

$$\|u - u^{eq}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon.$$

Définition 2 (α -STLC)

Soit $\alpha > 0$. Le système de contrôle (1) est α -STLC en (z^{eq}, u^{eq}) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous z_0, z_1 dans $B(z^{eq}, \eta)$, il existe des contrôles $u(\cdot) = (u_1, \dots, u_m)$ dans $L^\infty([0, \varepsilon])$ telle que la solution $z(\cdot) : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système (1) vérifie $z(0) = z_0$, $z(\varepsilon) = z_1$, et

$$\|u - u^{eq}\|_{L^\infty} \leq \alpha + \varepsilon.$$



Résultats pour les systèmes à contrôle scalaire ($m = 1$)

$$\dot{z} = f_0(z) + u_1(t)f_1(z) \quad (\Sigma)$$

On suppose que $f_0(0) = 0$ et on étudie la contrôlabilité en $(0, 0)$.

On définit :

- ▶ S_k le sous-espace généré par les crochets de Lie de f_0 et f_1 contenant au plus k fois f_1 ;
- ▶ $S_k(0)$ le sous-espace de \mathbb{R}^n généré par les éléments S_k évalués en 0.

Condition suffisante pour la STLC :

Théorème 1 (Sussmann 1983)

Si $\bigcup_{k \geq 0} S_k(0) = \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \geq 1$, $S_{2k}(0)$ est inclus dans $S_{2k-1}(0)$, alors (Σ) est STLC en $(0, 0)$.

Première obstruction à cette condition : si $S_2(0)$ non inclus dans $S_1(0)$.

Condition nécessaire pour la STLC :

Théorème 2 (id.)

Si $[f_1, [f_0, f_1]](0) \notin S_1(0)$, alors (Σ) n'est α -STLC en $(0, 0)$ pour aucun $\alpha \in \mathbb{R}$.

Systèmes à deux entrées ($m = 2$)

- ▶ Condition nécessaire pour deux contrôles ?

On considère maintenant le système

$$\dot{z} = f_0(z) + u_1(t)f_1(z) + u_2(t)f_2(z). \quad (2)$$

On suppose que $f_0(0) = 0$ et $f_2(0) = 0$, et on étudie la contrôlabilité en les états d'équilibre $(0, (0, u_2^{\text{eq}}))$ avec $u_2^{\text{eq}} \in \mathbb{R}$.

- ▶ Rôle du crochet $[f_1, [f_0, f_1]]$?

Systèmes à deux entrées

On définit :

- ▶ R_1 le sous-espace engendré par tous les crochets de Lie de f_0, f_1, f_2 contenant au plus k fois f_1 ;
- ▶ $R_1(0)$ le sous-espace de \mathbb{R}^n généré par les éléments S_1 évalués en 0.

Théorème 3 (Giraldi, Lissy, M., Pomet)

Si $[f_1, [f_0, f_1]](0) \notin R_1(0)$, alors :

1. si $[f_1, [f_0, f_1]](0)$ appartient à $R_1(0) + \text{Vect}([f_1, [f_2, f_1]](0))$, soit β tel que

$$[f_1, [f_0, f_1]](0) + \beta[f_1, [f_2, f_1]](0) \in R_1(0). \quad (3)$$

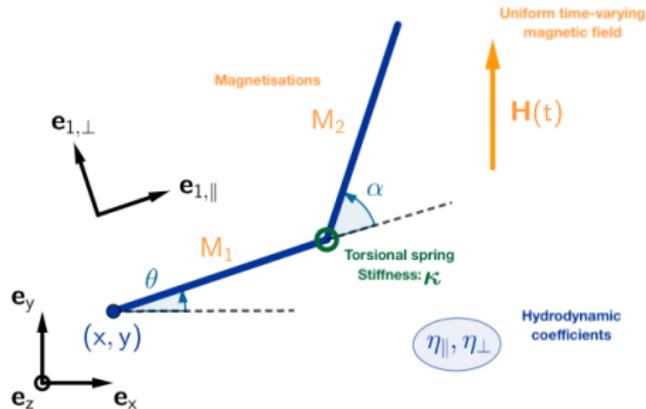
Alors, le système (2) n'est pas STLC en $(0, (0, u_2^{eq}))$ pour tout u_2^{eq} tel que $u_2^{eq} \neq \beta$.

2. si $[f_1, [f_0, f_1]](0)$ n'appartient pas à $R_1(0) + \text{Vect}([f_1, [f_2, f_1]](0))$, alors le système (2) n'est pas α -STLC en $(0, (0, u_2^{eq}))$ pour tous $u_2^{eq} \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$.

- ▶ Le crochet $[f_1, [f_2, f_1]]$ peut éventuellement « neutraliser le mauvais crochet » $[f_1, [f_0, f_1]]$ quand ceux-ci partagent une direction commune.

Application : micro-nageurs magnétiques

Ce type de systèmes apparaît dans l'étude de nageurs magnétisés à bas nombre de Reynolds. Nageur à deux segments :



- ▶ Coefficients de traînée hydrodynamique (Resistive Force Theory) : $\eta_{\parallel}, \eta_{\perp}$
- ▶ Moments magnétiques : M_1, M_2
- ▶ Champ magnétique uniforme et dépendant du temps : $\mathbf{H}(t) \rightarrow v$ comme le contrôle, avec deux composantes $(H_{\parallel}, H_{\perp})$ une fois projeté dans la base mobile $(\mathbf{e}_{1,\parallel}, \mathbf{e}_{1,\perp})$ associée au premier segment.

Application : micro-nageurs magnétiques

En écrivant les équations d'équilibre des forces et des moments, on obtient un système de contrôle :

$$\dot{\mathbf{z}} = f_0(\mathbf{z}) + H_{\perp} f_1(\mathbf{z}) + H_{\parallel} f_2(\mathbf{z}).$$

où $\mathbf{z} = (x, y, \theta, \alpha)$ est l'état et H_{\parallel} et H_{\perp} les contrôles. De plus,

$$f_0(0) = f_2(0) = 0,$$

(i.e. $(0, (0, H_{\parallel}))$) est un état d'équilibre pour tout H_{\parallel}).

Application : micro-nageurs magnétiques

On exclut quelques cas particuliers : $M_1 \neq 0$, $M_2 \neq 0$, $M_1 - M_2 \neq 0$ and $\eta \neq \xi$.

On peut alors vérifier :

- ▶ $R_1(0) = \text{Vect} (e_2, e_3, e_4)$;
- ▶ $[f_1, [f_0, f_1]](0) = \left(\frac{216(\eta - \xi) M_1 M_2 (M_1 - M_2)}{\ell^8 \eta^3 \xi}, 0, 0, 0 \right)$;
- ▶ $[f_1, [f_2, f_1]](0) = \left(\frac{216\kappa(\eta - \xi)(M_1 + M_2)(M_1 - M_2)}{\ell^8 \eta^3 \xi}, 0, 0, 0 \right)$.

Posons $\beta = \kappa \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)$. On peut alors appliquer notre résultat :

Théorème 4

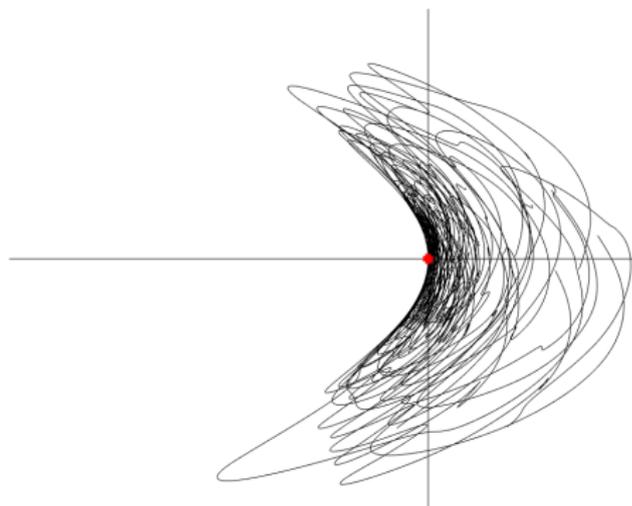
Le nageur à 2 segments n'est pas STLC en $(0, (0, H_{\parallel}))$ pour tout H_{\parallel} différent de β .

- ▶ De plus, on peut montrer à l'aide d'un résultat classique de Sussmann que le nageur à 2 liens est STLC en $(0, (0, \beta))$.

Application : micro-nageurs magnétiques

Simulations numériques

- ▶ On fait partir le nageur de sa position d'équilibre et on calcule la trajectoire pour des contrôles variant « autour » du contrôle de référence $(0, \gamma)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- ▶ On trace l'évolution de la position de l'extrémité (x, y) .

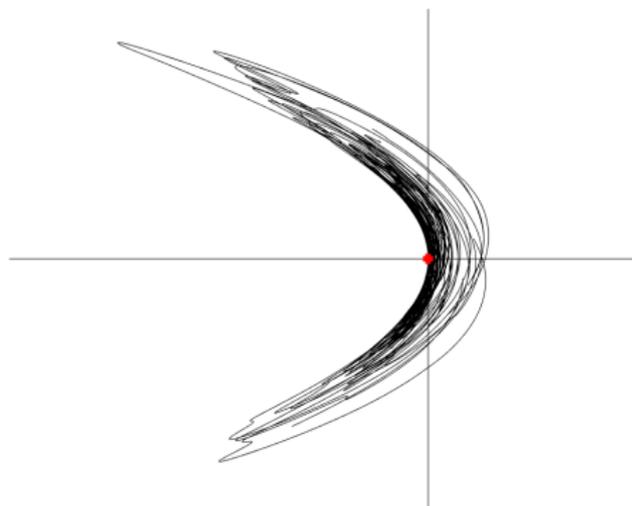


$$\gamma = 0.5\beta$$

Application : micro-nageurs magnétiques

Simulations numériques

- ▶ On fait partir le nageur de sa position d'équilibre et on calcule la trajectoire pour des contrôles variant « autour » du contrôle de référence $(0, \gamma)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- ▶ On trace l'évolution de la position de l'extrémité (x, y) .

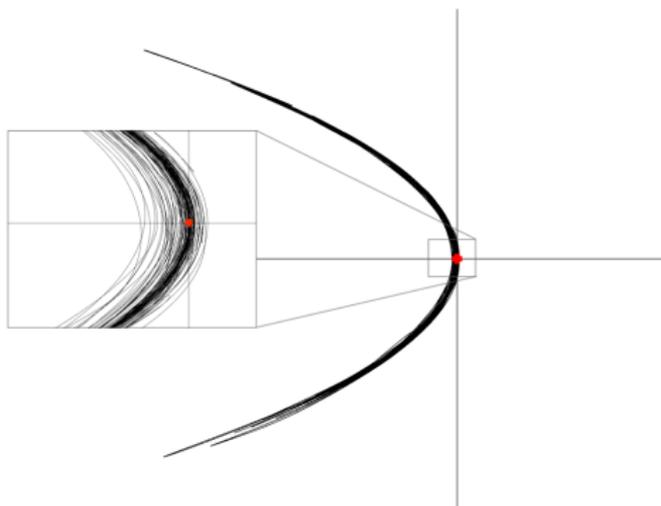


$$\gamma = 0.9\beta$$

Application : micro-nageurs magnétiques

Simulations numériques

- ▶ On fait partir le nageur de sa position d'équilibre et on calcule la trajectoire pour des contrôles variant « autour » du contrôle de référence $(0, \gamma)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- ▶ On trace l'évolution de la position de l'extrémité (x, y) .

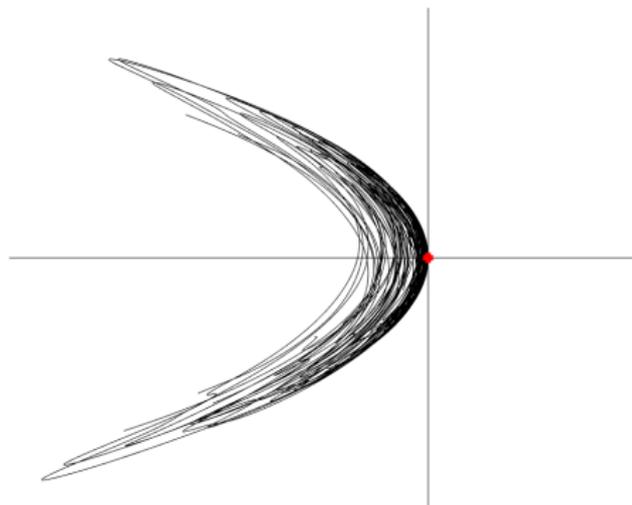


$$\gamma = \beta$$

Application : micro-nageurs magnétiques

Simulations numériques

- ▶ On fait partir le nageur de sa position d'équilibre et on calcule la trajectoire pour des contrôles variant « autour » du contrôle de référence $(0, \gamma)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- ▶ On trace l'évolution de la position de l'extrémité (x, y) .

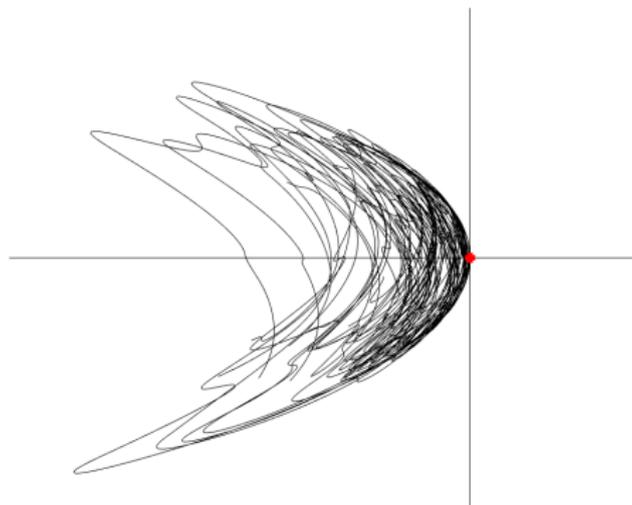


$$\gamma = 1.1\beta$$

Application : micro-nageurs magnétiques

Simulations numériques

- ▶ On fait partir le nageur de sa position d'équilibre et on calcule la trajectoire pour des contrôles variant « autour » du contrôle de référence $(0, \gamma)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
- ▶ On trace l'évolution de la position de l'extrémité (x, y) .



$$\gamma = 1.25\beta$$

Perspectives

- ▶ Côté théorie du contrôle : traiter plus finement les cas où $[f_1, [f_0, f_1]](0)$ est dans $R_1(0)$
- ▶ Côté micro-nageurs : généralisation à plus de segments