Le modèle à huit sommets en mécanique statistique

Paul Melotti

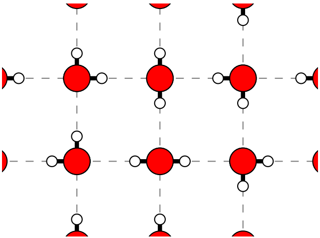
LPSM – Sorbonne Université

23/05/2019
Colloque Inter'Actions

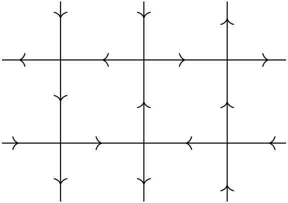
Plan

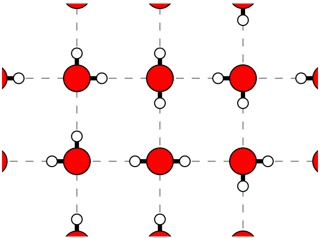
1. Modèle à huit sommets
2. Modèle de dimères
3. Modèle à huit sommets via les dimères

Un modèle de glace

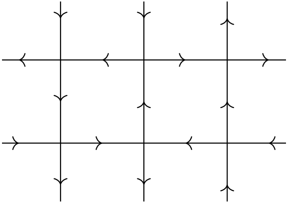


$\mapsto$

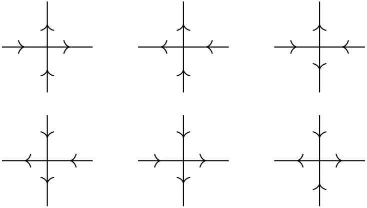




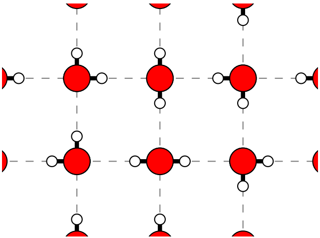
$\mapsto$



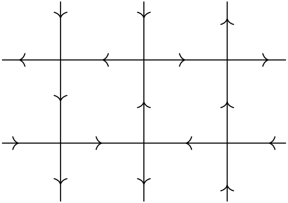
Six configurations locales ou « sommets » :



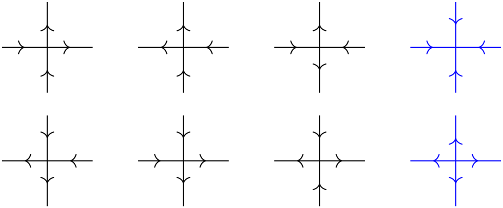
Un modèle de glace



$\mapsto$



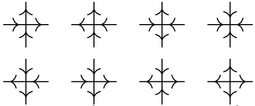
Six configurations locales ou « sommets » :



...huit sommets si on introduit des défauts (absence de molécule d'eau, superpositions...).

Un modèle de glace

On fixe $a, b, c, d > 0$ les poids locaux des six configurations :



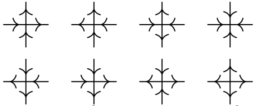
a b c d

Sur une portion finie G de $\mathbb{Z}^2$, une orientation τ qui satisfait ces règles a pour *poids*

$$w(\tau) = a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c} d^{N_d}.$$

Un modèle de glace

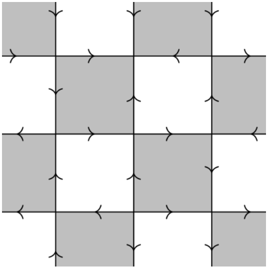
On fixe $a, b, c, d > 0$ les poids locaux des six configurations :



a b c d

Sur une portion finie G de $\mathbb{Z}^2$, une orientation τ qui satisfait ces règles a pour *poids*

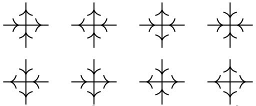
$$w(\tau) = a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c} d^{N_d}.$$



$\rightarrow \quad w(\tau) = ab^3c^4d.$

Un modèle de glace

On fixe $a, b, c, d > 0$ les poids locaux des six configurations :



$a \quad b \quad c \quad d$

Sur une portion finie G de $\mathbb{Z}^2$, une orientation τ qui satisfait ces règles a pour *poids*

$$w(\tau) = a^{N_a} b^{N_b} c^{N_c} d^{N_d}.$$

Mesure de Boltzmann :

$$\mathbb{P}(\tau) = \frac{w(\tau)}{Z(G; a, b, c, d)},$$

$$Z(G; a, b, c, d) = \sum_{\tau} w(\tau).$$

Questions

- Énergie libre :

$$\lim_{G \to \mathbb{Z}^2} Z(G; a, b, c, d)^{1/|G|} \text{ ?}$$

- Corrélations : Pour deux arêtes e, e' verticales « loin » dans G,

$$\mathrm{Cov}\left(1_{e \text{ verticale dans } \tau}, 1_{e' \text{ verticale dans } \tau}\right) \sim \exp\left(\frac{|e - e'|}{\xi}\right) ?$$

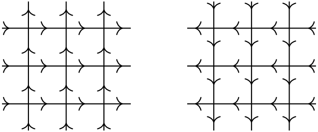
  Si c'est le cas ξ est une *longueur typique* de corrélation.

- Généralité du modèle : extension à des graphes 4-réguliers ? Sur la sphère, le tore,...

Diagramme des phases

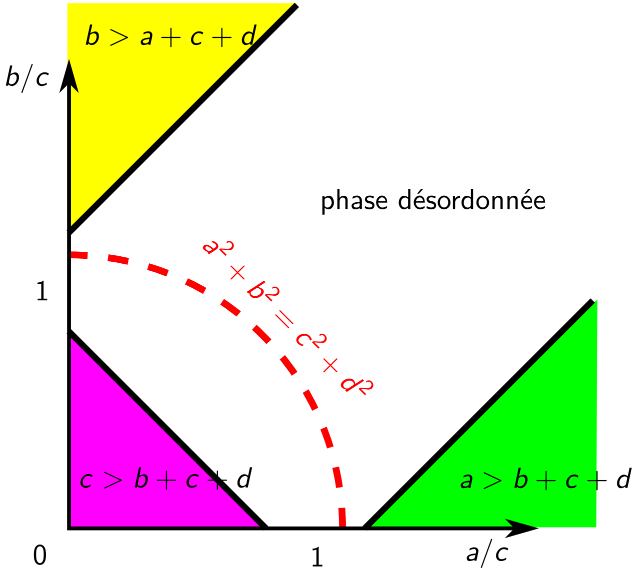
Comportement du modèle quand $G \to \mathbb{Z}^2$ conjecturé par les physiciens dans les années 70-80 (Baxter, Fan, Lieb, Sutherland, Wu,...) :

- Si $a \geq b + c + d$, la probabilité sur $\mathbb{Z}^2$ se concentre sur deux configurations :



- Idem pour $b \geq a + c + d$, etc.
- Si chaque poids est inférieur à la somme des trois autres, alors toutes les configurations locales apparaissent avec densité > 0.

Diagramme des phases ($d < c$)

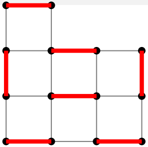


Plan

1. Modèle à huit sommets
2. Modèle de dimères
3. Modèle à huit sommets via les dimères

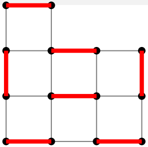
Modèle de dimères

$G = (V, E)$ un graphe planaire,
muni des poids positifs $(\mu_e)_{e \in E}$.



Modèle de dimères

$G = (V, E)$ un graphe planaire,
muni des poids positifs $(\mu_e)_{e \in E}$.



Configuration de dimères : sous-ensemble d'arêtes $m \subset E$ tel que tout sommet touche une et une seule arête de m. Poids d'une configuration :

$$w_{\mathrm{dim}}(m) = \prod_{e \in m} \mu_e.$$

Probabilité de Boltzmann :

$$\mathbb{P}(m) = \frac{w_{\mathrm{dim}}(m)}{Z_{dim}(G; \mu)},$$

$$Z_{dim}(G; \mu) = \sum_m \prod_{e \in m} \mu_e.$$

Théorème de Kasteleyn

On suppose G planaire et *biparti* ; $V = W \sqcup B$. Si on oriente les arêtes de G, on peut définir une matrice d'adjacence orientée et pondérée $K = (K_{w,b})_{w \in W, b \in B}$:

$$K_{w,b} = \begin{cases} \mu(e) & \text{si } \overset{w}{\circ} \xrightarrow{\ e\ } \overset{b}{\bullet}, \\ -\mu(e) & \text{si } \overset{w}{\circ} \xleftarrow{\ e\ } \overset{b}{\bullet}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème de Kasteleyn

On suppose G planaire et *biparti* ; $V = W \sqcup B$. Si on oriente les arêtes de G, on peut définir une matrice d'adjacence orientée et pondérée $K = (K_{w,b})_{w \in W, b \in B}$:

$$K_{w,b} = \begin{cases} \mu(e) & \text{si } \overset{w}{\circ}\!\xrightarrow{\;e\;}\!\overset{b}{\bullet}\,, \\ -\mu(e) & \text{si } \overset{w}{\circ}\!\xleftarrow{\;e\;}\!\overset{b}{\bullet}\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

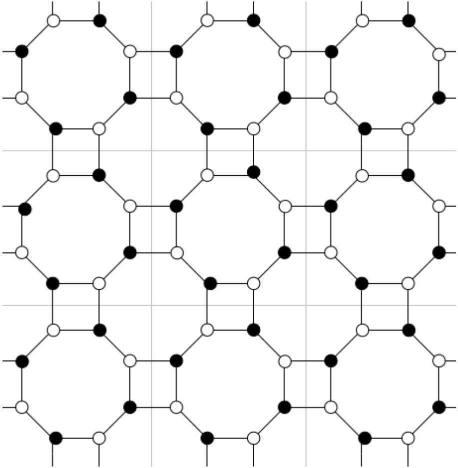
Théorème (Kasteleyn, Temperley-Fisher ; 1961)

Il existe une orientation telle que

$$Z_{dim}(G; \mu) = \det K.$$

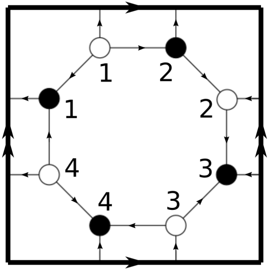
Énergie libre pour un graphe biparti périodique

G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.



Énergie libre pour un graphe biparti périodique

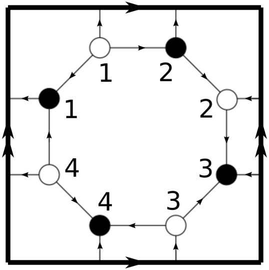
G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et K_1 sa matrice d'adjacence pondérée orientée.



$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Énergie libre pour un graphe biparti périodique

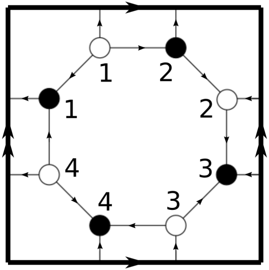
G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et K_1 sa matrice d'adjacence pondérée orientée.
Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $K_1(z, w)$ une matrice modifiée selon l'homologie.



$$K_1(z, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/z \\ -1 \times w & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 \times z & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/w & 1 \end{pmatrix}$$

Énergie libre pour un graphe biparti périodique

G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et K_1 sa matrice d'adjacence pondérée orientée.
Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $K_1(z, w)$ une matrice modifiée selon l'homologie.
$P(z, w) = \det K_1(z, w)$ est le *polynôme caractéristique*.



$$P(z, w) = 5 - z - \frac{1}{z} - w - \frac{1}{w}.$$

Énergie libre pour un graphe biparti périodique

G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
$G_1 = G/\mathbb{Z}^2$, et K_1 sa matrice d'adjacence pondérée orientée.
Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $K_1(z, w)$ une matrice modifiée selon l'homologie.
$P(z, w) = \det K_1(z, w)$ est le *polynôme caractéristique*.

Théorème (Cohn-Kenyon-Propp 2001, Kenyon-Okounkov-Sheffield 2006)

Soit $G_n = G/(n\mathbb{Z})^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \log\left(Z_{\mathrm{dim}}(G_n, \mu)\right) = \frac{-1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log|P(z, w)| \frac{\mathrm{d}z}{z} \frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

Corrélations

G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
Lorsque $n \to \infty$, les mesures de Boltzmann sur G_n ont une limite : c'est une mesure *de Gibbs* sur le graphe infini G.

Corrélations

G est planaire, biparti, $\mathbb{Z}^2$-périodique.
Lorsque $n \to \infty$, les mesures de Boltzmann sur G_n ont une limite : c'est une mesure *de Gibbs* sur le graphe infini G.

Théorème (Cohn-Kenyon-Propp 2001, Kenyon-Okounkov-Sheffield 2006)

Soient $e_1 = \{w_1 b_1\}, \ldots, e_k = \{w_k, b_k\}$ des arêtes de G. La probabilités qu'elles soient toutes présentes est

$$\mathbb{P}(e_1, \ldots, e_k \in m) = \left(\prod_{i=1}^{k} K_{w_i, b_i} \right) \det \left(K^{-1}_{b_i, w_j} \right)_{1 \leq i,j \leq k}$$

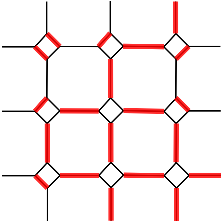
où

$$K^{-1}_{b, w+(n,m)} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{[{}^t\mathrm{Com} K_1(z,w)]_{b,w}}{P(z,w)} z^n w^m \frac{\mathrm{d}z}{z} \frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

Plan

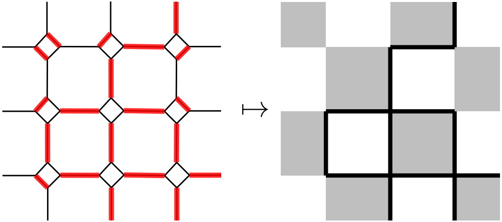
Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à huit sommets τ.



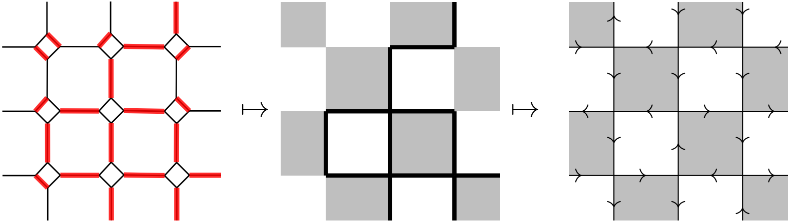
Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à huit sommets τ.



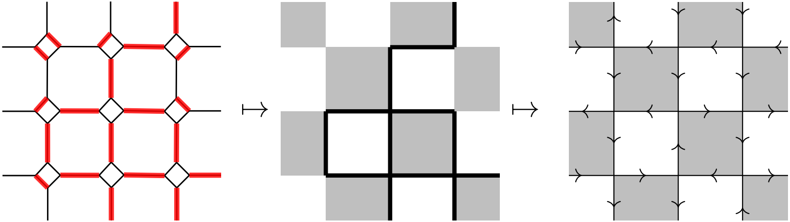
Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à huit sommets τ.



Décorations

Idée : dimères bipartis $m \mapsto$ modèle à huit sommets τ.



Proposition (Fan, Lin, Wu, ... 1970s)

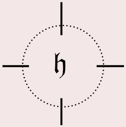
Si le modèle à huit sommets satisfait $d = 0$ et $a^2 + b^2 = c^2$, il existe des poids sur le graphe de dimères tels que

$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\text{dim}}(m) = w(\tau).$$

Existence de décorations

Question

Autres décorations $\mathfrak{h}$ plus générales telles que



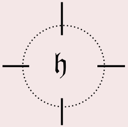
$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\mathrm{dim}}(m) = w(\tau)?$$

Existence de décorations

Question

Autres décorations $\mathfrak{h}$ plus générales telles que

$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\mathrm{dim}}(m) = w(\tau)?$$



Lemme

Si une décoration $\mathfrak{h}$ **planaire** existe,

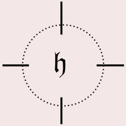
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Existence de décorations

Question

Autres décorations $\mathfrak{h}$ plus générales telles que

$$\sum_{m \mapsto \tau} w_{\text{dim}}(m) = w(\tau)?$$



Lemme

Si une décoration $\mathfrak{h}$ **planaire** existe,

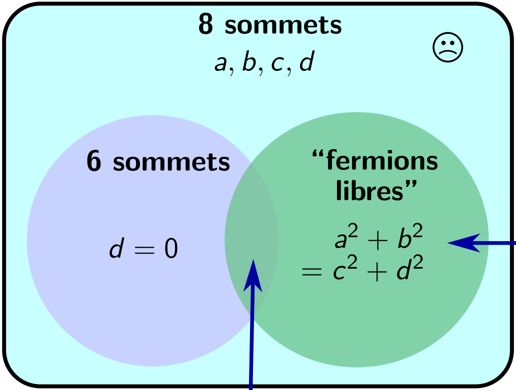
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Lemme

Si une décoration $\mathfrak{h}$ **planaire bipartie** existe,

$$abcd = 0 \text{ et } a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Résumé



Dimères non bipartis

Dimères bipartis

- Énergie libre
- Corrélations
- Mesures de Gibbs ergodiques...

Couplage

Théorème (M. 2018)

Pour tout modèle à huit sommets « fermions libres » ($a^2 + b^2 = c^2 + d^2$), il existe deux modèles à six sommets « fermions libres » $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ avec $a_i^2 + b_i^2 = c_i^2$ tels que :

$$Z(a, b, c, d)^2 = Z(a_1, b_1, c_1, 0)\ Z(a_2, b_2, c_2, 0).$$

Conséquences

- Énergie libre :

$$\frac{-1}{(2i\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\log|P(z,w)|\frac{dz}{z}\frac{dw}{w}$$

où

$$P(z,w) = P_1(z,w)P_2(z,w).$$

- Corrélations :

$$\mathrm{Cov}\left(1_{e \text{ verticale dans } \tau}, 1_{e' \text{ verticale dans } \tau}\right) \sim \exp\left(\frac{|e-e'|}{\xi}\right)$$

où $\xi = \Theta\left((\beta-\beta_c)^{-1}\right)$.

- Couplages : si τ, τ' indépendantes tirées selon la mesure de Boltzmann de (a,b,c,d), et τ_1, τ_2 selon celles de (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2),

$$\tau \triangle \tau' \overset{d}{=} \tau_1 \triangle \tau_2.$$

- Valable sur tout graphe planaire périodique 4-régulier, avec poids locaux.

Éléments de preuve

Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a, b, c, d)$.

- $Z(a, b, c, d) = Z(a, b, c, -d)$.

Éléments de preuve

Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a, b, c, d)$.

- $Z(a, b, c, d) = Z(a, b, c, -d)$.
- Dualité de Wu : $Z(a, b, c, d) = Z(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Éléments de preuve

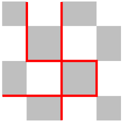
Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a, b, c, d)$.

- $Z(a, b, c, d) = Z(a, b, c, -d)$.
- Dualité de Wu : $Z(a, b, c, d) = Z(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ où

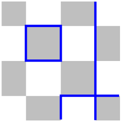
$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :

τ



τ'



Éléments de preuve

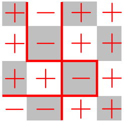
Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a, b, c, d)$.

- $Z(a, b, c, d) = Z(a, b, c, -d)$.
- Dualité de Wu : $Z(a, b, c, d) = Z(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ où

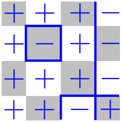
$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :

τ



τ'



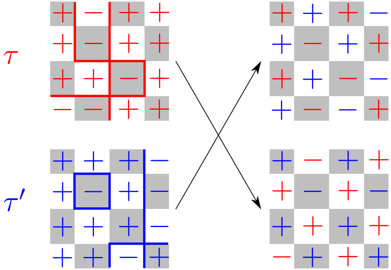
Éléments de preuve

Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a, b, c, d)$.

- $Z(a, b, c, d) = Z(a, b, c, -d)$.
- Dualité de Wu : $Z(a, b, c, d) = Z(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :



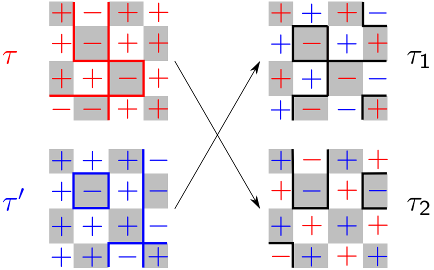
Éléments de preuve

Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a,b,c,d)$.

- $Z(a,b,c,d) = Z(a,b,c,-d)$.
- Dualité de Wu : $Z(a,b,c,d) = Z(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :



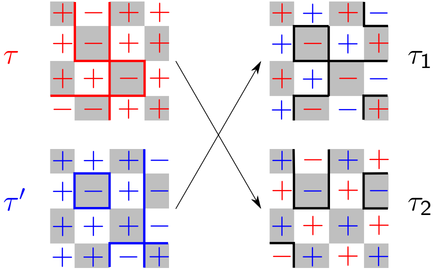
Éléments de preuve

Trouver suffisamment de symétries sur $Z(a,b,c,d)$.

- $Z(a,b,c,d) = Z(a,b,c,-d)$.
- Dualité de Wu : $Z(a,b,c,d) = Z(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$ où

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

- Échange de spins :



Si $ab = cd$ et $ab = cd$,

$$\begin{aligned} & Z(a,b,c,d) \\ & \times Z(a,b,c,d) \\ = {} & Z(a_1,b_1,c_1,d_1) \\ & \times Z(a_2,b_2,c_2,d_2) \end{aligned}$$

$$P(z,w) = P_1(z,w)P_2(z,w)$$