

Introduction aux dynamiques d'interfaces aléatoires : exemple du Polynuclear Growth Model.

Vincent LEROUVILLOIS,
sous la direction de Fabio TONINELLI
Université Lyon 1

20 mai 2019

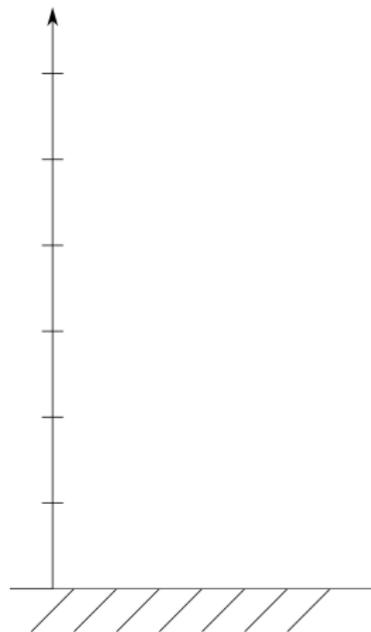
Outline

1 Motivations

2 Le Polynuclear Growth Model

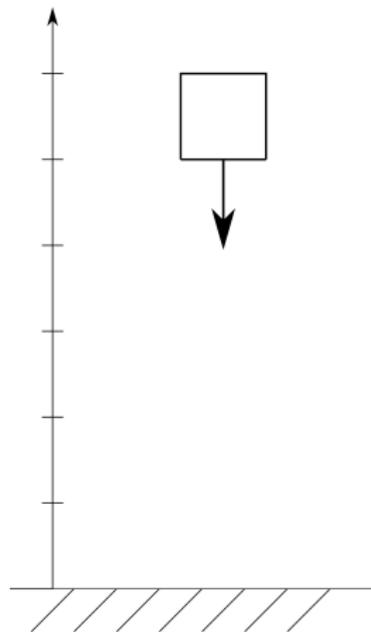
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



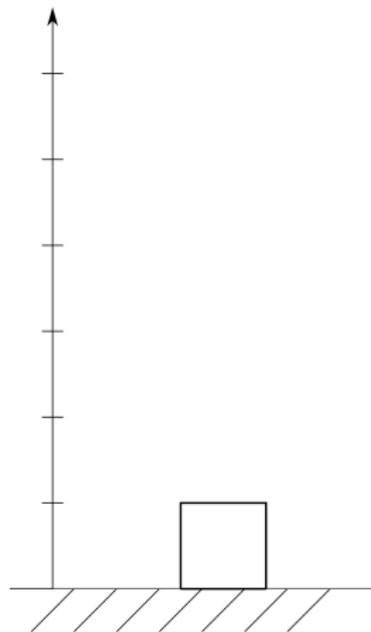
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



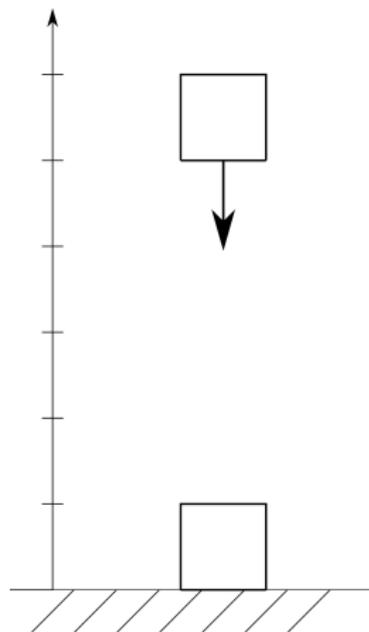
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



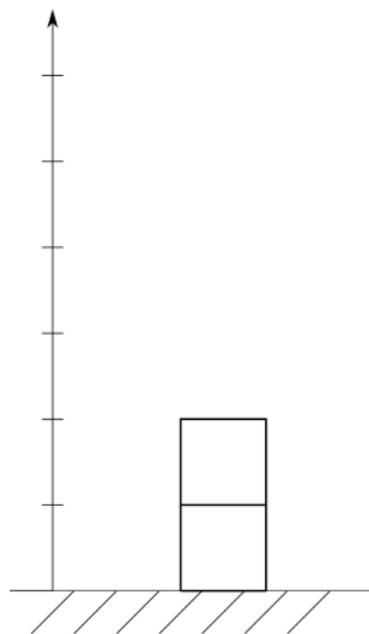
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



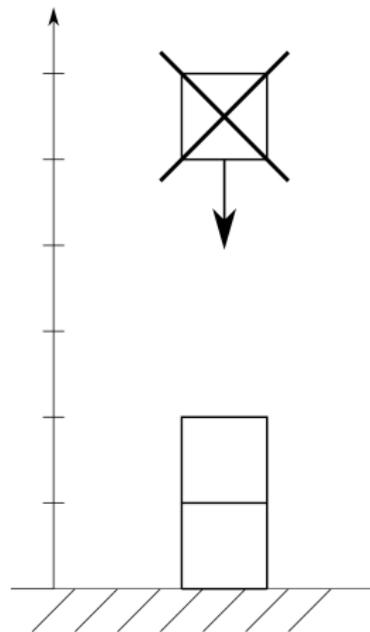
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



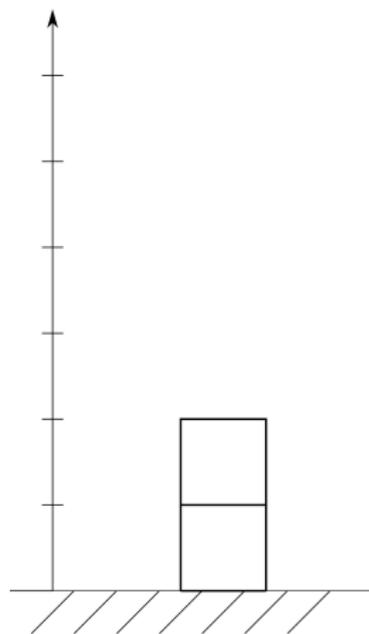
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



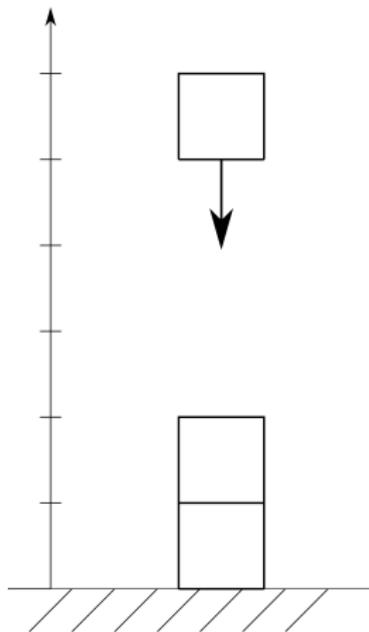
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



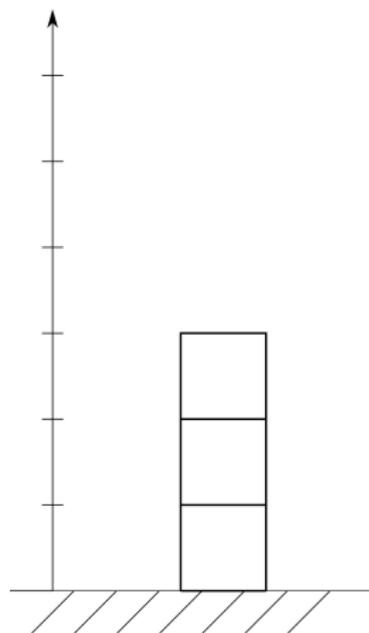
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



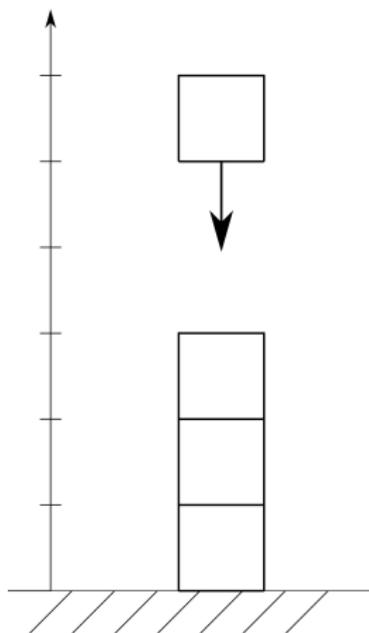
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p

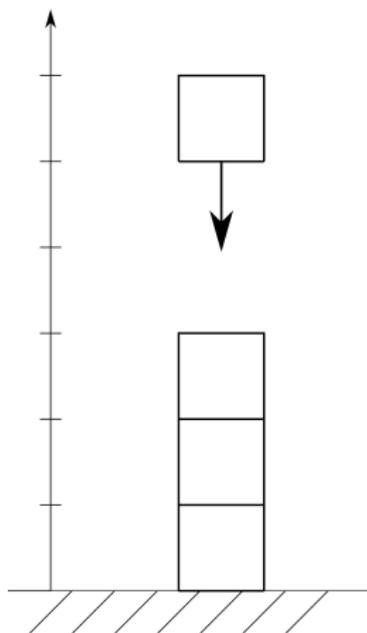


Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



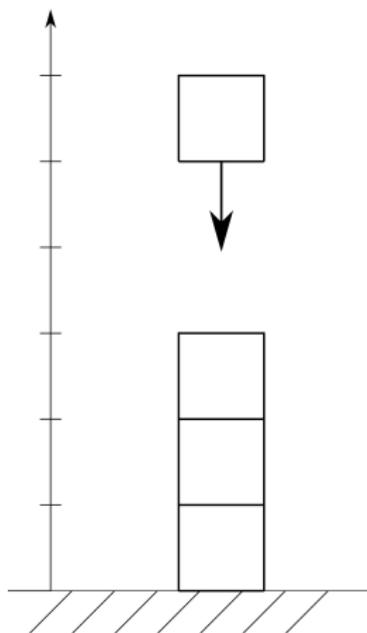
Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p 

- Hauteur au temps t : $h(t) = \sum_{i=1}^t B_i$, avec
 $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d $\sim \mathcal{B}(p)$

Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p



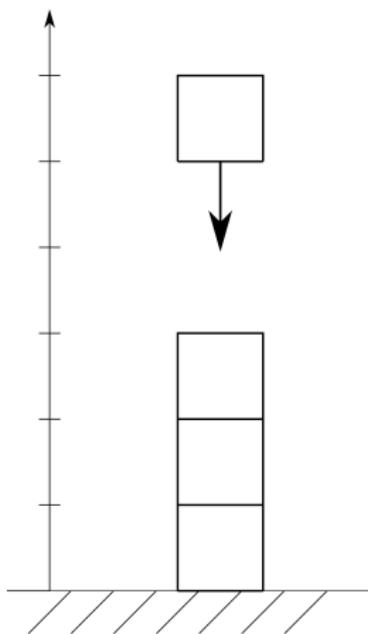
- Hauteur au temps t : $h(t) = \sum_{i=1}^t B_i$, avec

$(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d $\sim \mathcal{B}(p)$

- Loi des grands nombres :

$$\frac{1}{t} h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} p$$

Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p 

- Hauteur au temps t : $h(t) = \sum_{i=1}^t B_i$, avec
 $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d $\sim \mathcal{B}(p)$

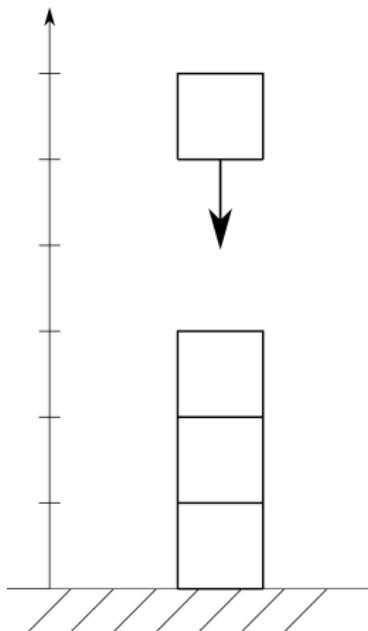
- Loi des grands nombres :

$$\frac{1}{t} h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} p$$

- Théorème central limite :

$$\frac{h(t) - tp}{\sqrt{p(1-p)} t^{1/2}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1)$$

Dimension 0

Bloc tombe avec Proba p 

- Hauteur au temps t : $h(t) = \sum_{i=1}^t B_i$, avec
 $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d $\sim \mathcal{B}(p)$

- Loi des grands nombres :

$$\frac{1}{t} h(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} p$$

- Théorème central limite :

$$\frac{h(t) - tp}{\sqrt{p(1-p)} t^{1/2}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1)$$

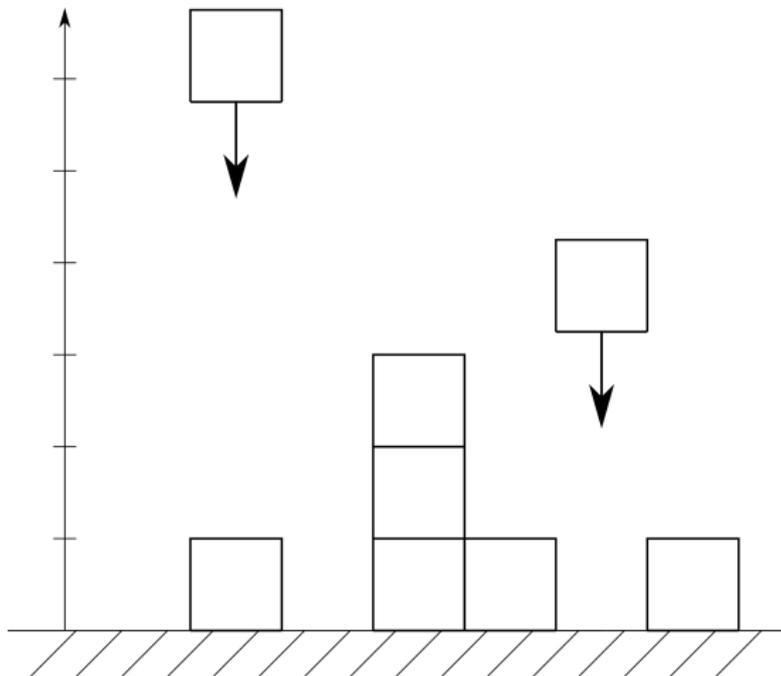
- Universalité

Dimension 1 : colonnes indépendantes

Blocs tombent à taux 1,
indépendamment dans chaque colonne.

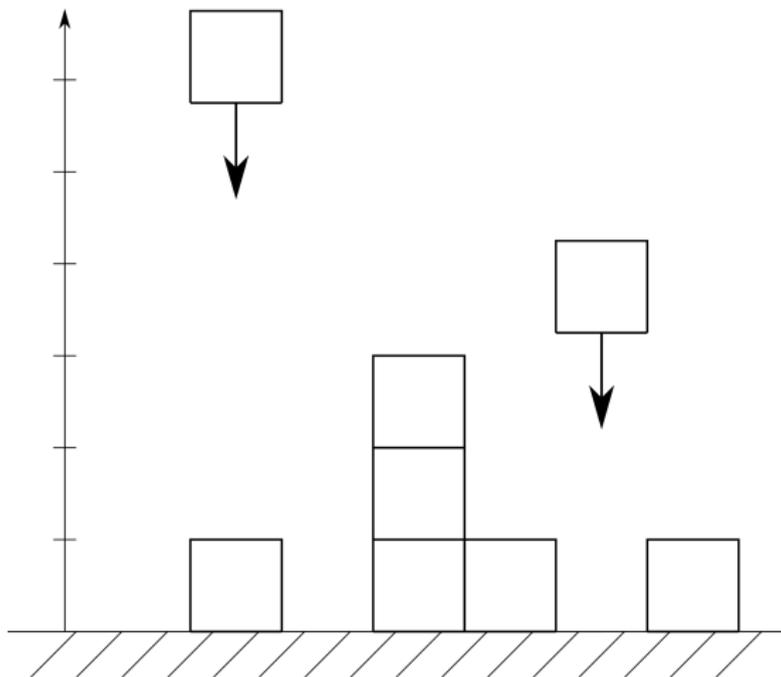
Dimension 1 : colonnes indépendantes

Blocs tombent à taux 1,
indépendamment dans chaque colonne.



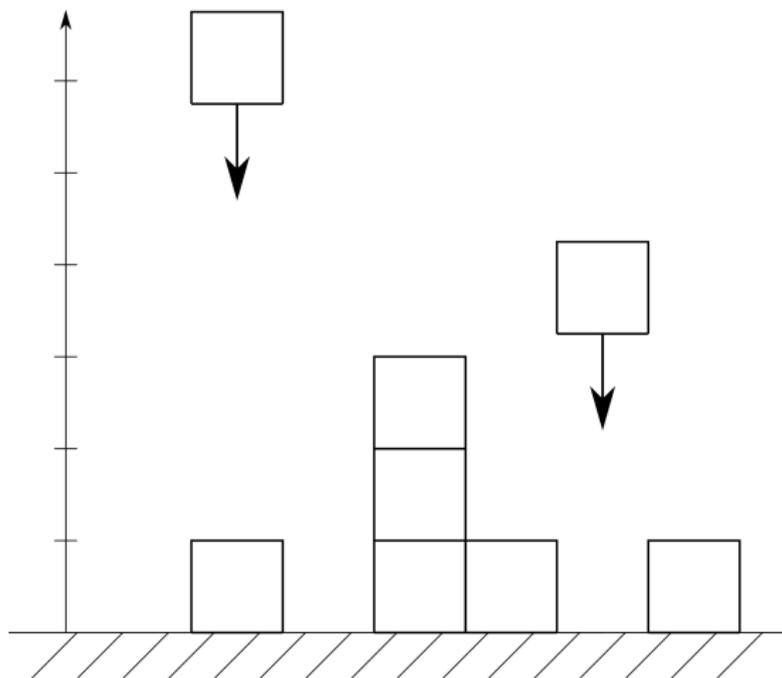
Dimension 1 : colonnes indépendantes

Blocs tombent à taux 1, (temps d'attente entre deux blocs $\sim \text{Exp}(1)$) indépendamment dans chaque colonne.



Dimension 1 : colonnes indépendantes

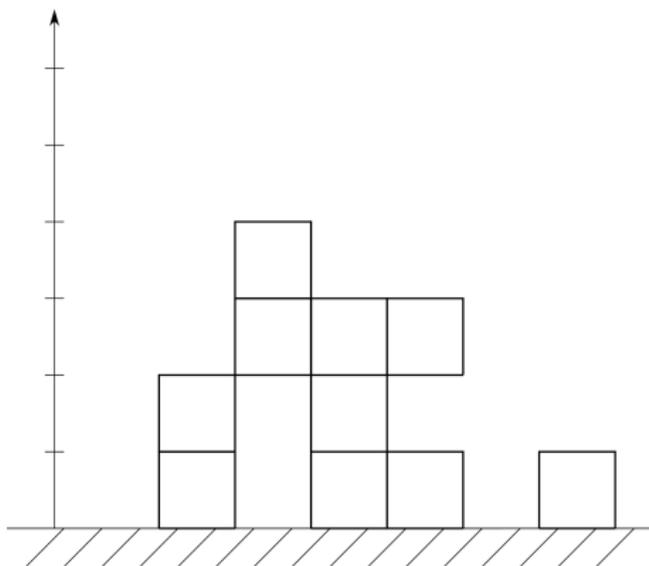
Blocs tombent à taux 1, (temps d'attente entre deux blocs $\sim \text{Exp}(1)$) indépendamment dans chaque colonne.



↔ même comportement que précédemment pour chaque colonne

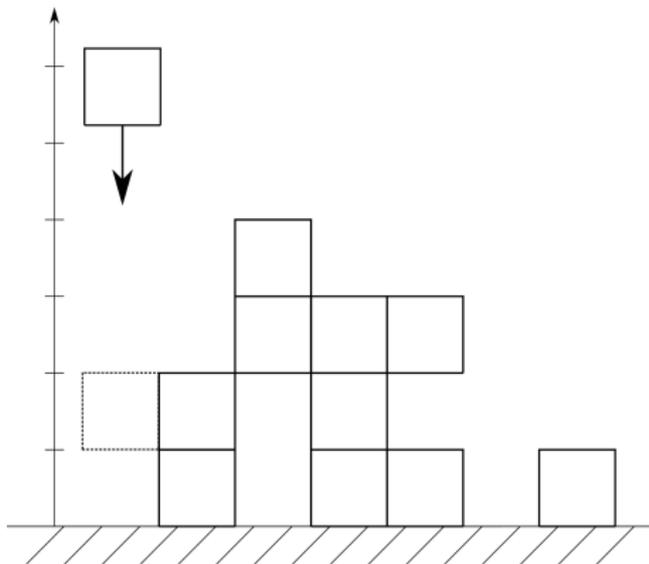
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



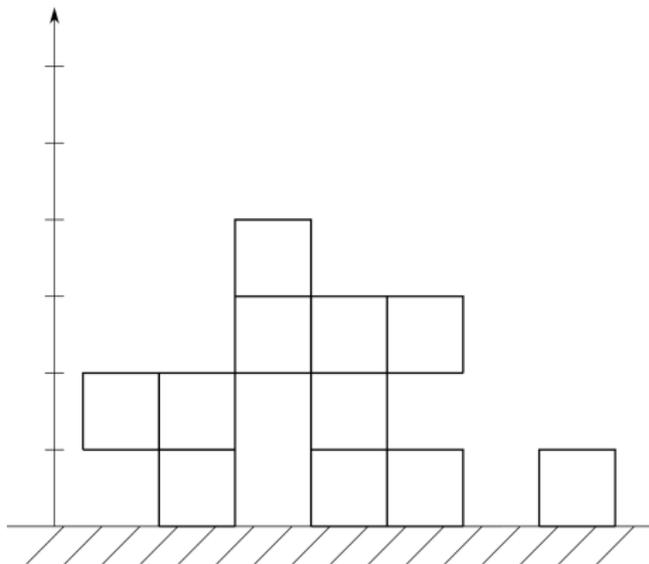
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



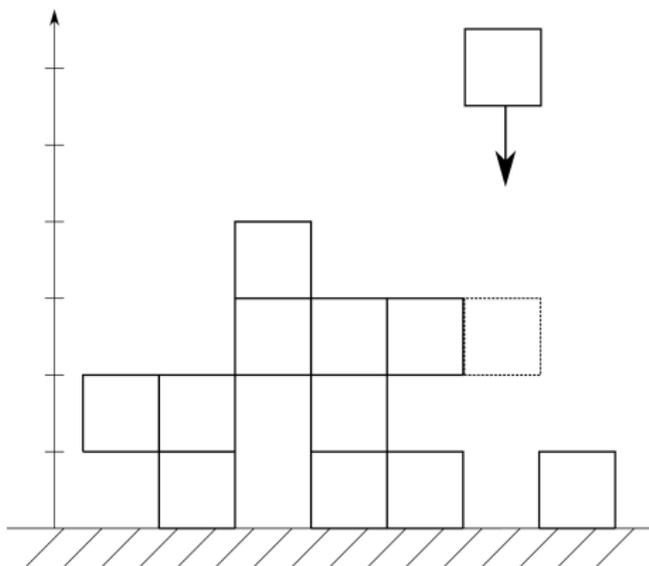
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



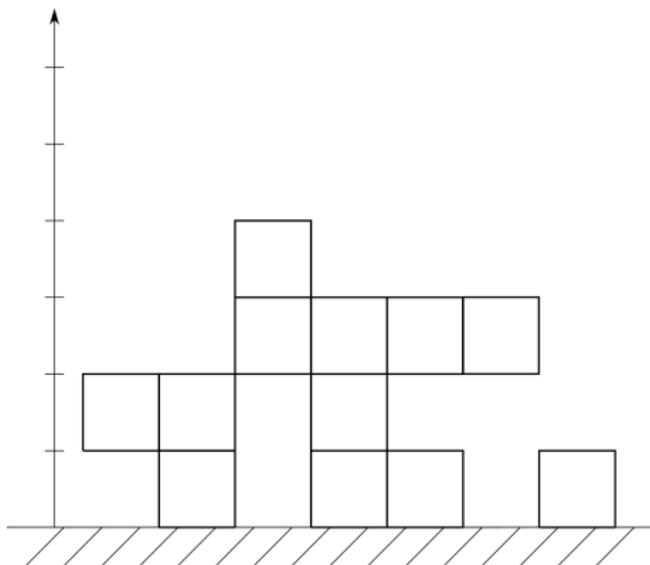
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



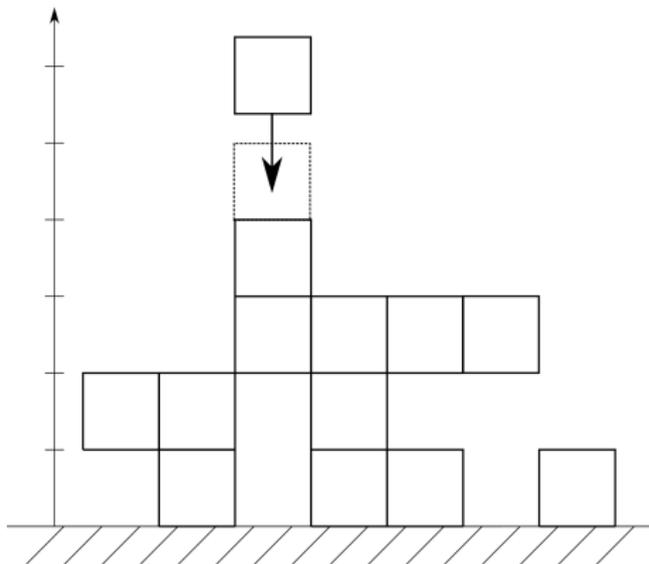
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



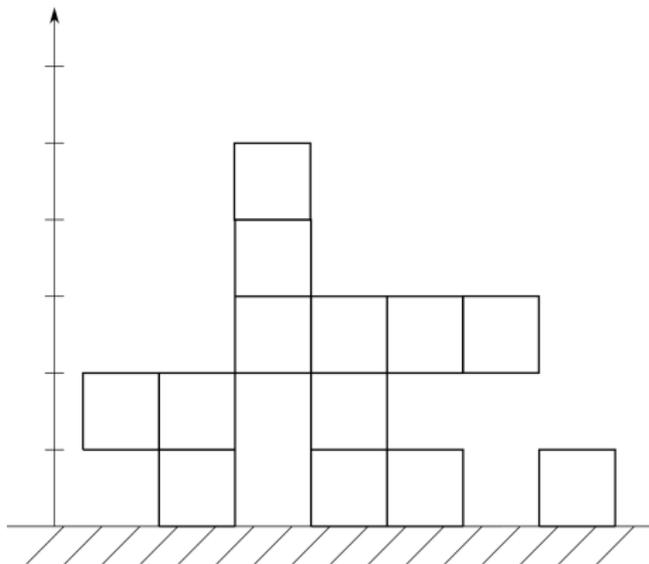
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



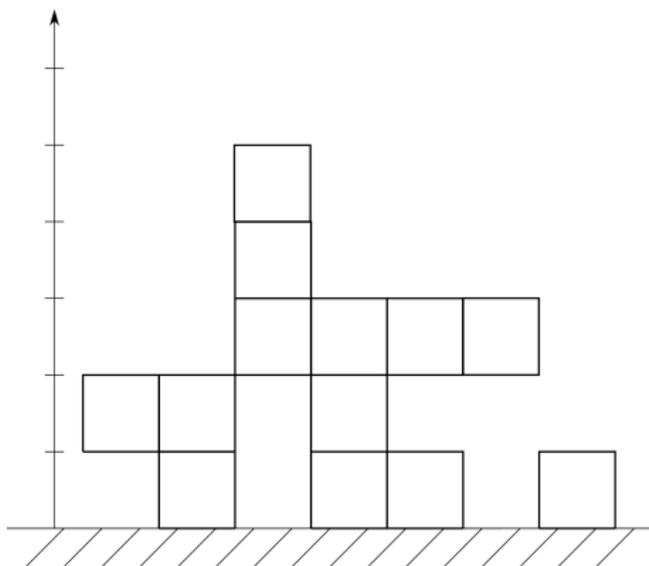
Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

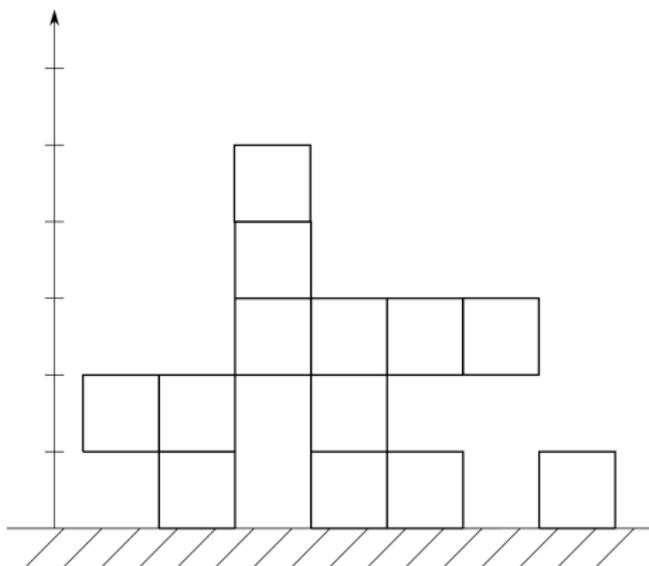
Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



- Hauteur de la colonne x au temps t : $h(x, t)$

Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.

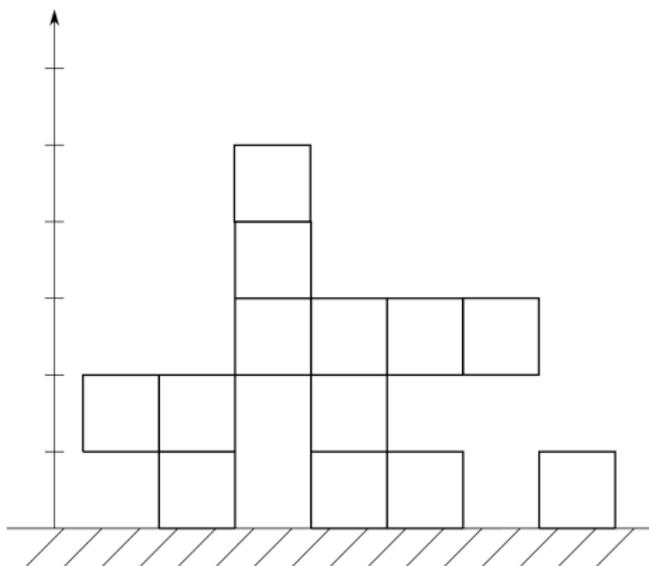


- Hauteur de la colonne x au temps t : $h(x, t)$
- Loi des grands nombres :

$$\frac{1}{t} h(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s} c$$

Dimension 1 : modèle de Déposition Balistique

Blocs collants tombent à taux 1, indépendamment dans chaque colonne.



- Hauteur de la colonne x au temps t : $h(x, t)$
- Loi des grands nombres :

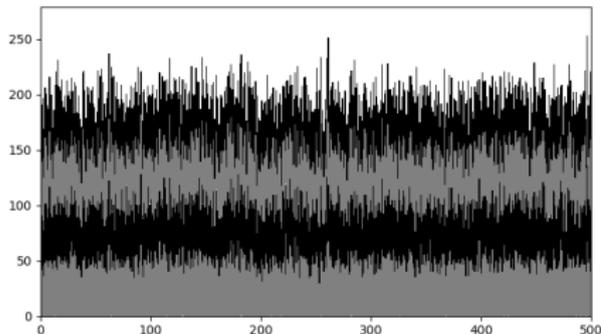
$$\frac{1}{t} h(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s} c$$

- Fluctuations conjecturées :

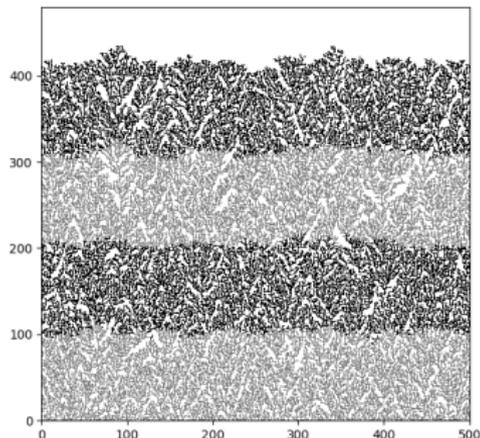
$$\frac{h(x, t) - ct}{c't^{1/3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{loi} F_{GOE}$$

Classe d'universalité Gaussienne :

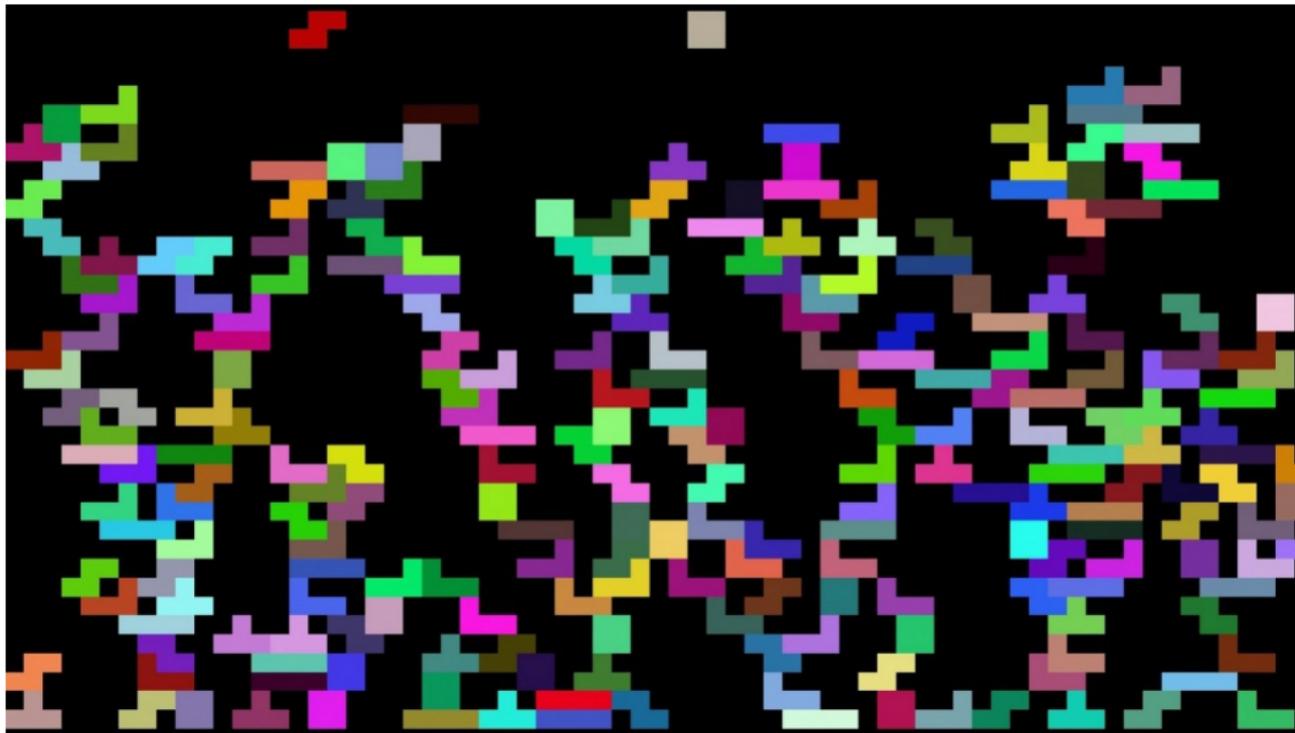
- Croissance linéaire
- Fluctuations : $t^{1/2}$
loi gaussienne

Colonnes indépendantes ($t = 200$)Classe d'universalité KPZ :

- Croissance linéaire
- Fluctuations conjecturées : $t^{1/3}$
loi Tracy-Widom (F_{GOE})

Déposition Balistique sur un Tore ($t = 200$)

Autre exemple : Tétris aléatoire



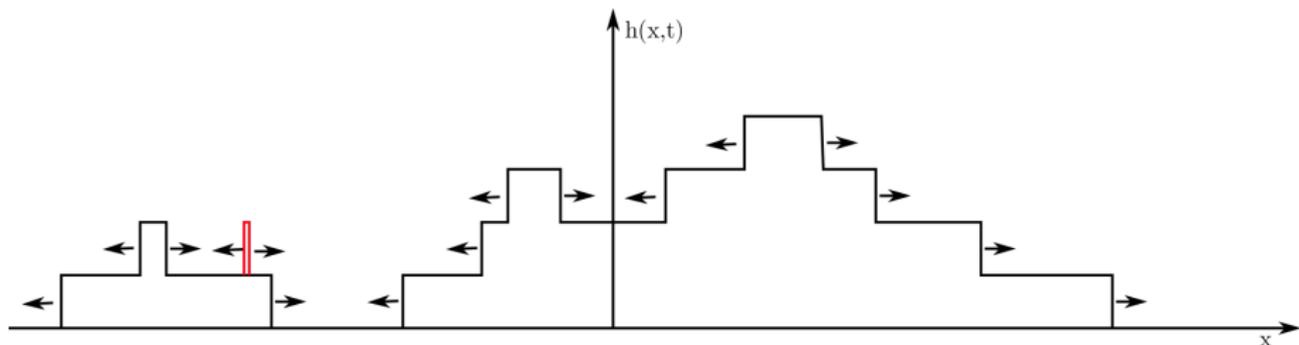
Classe d'universalité KPZ ?

Outline

1 Motivations

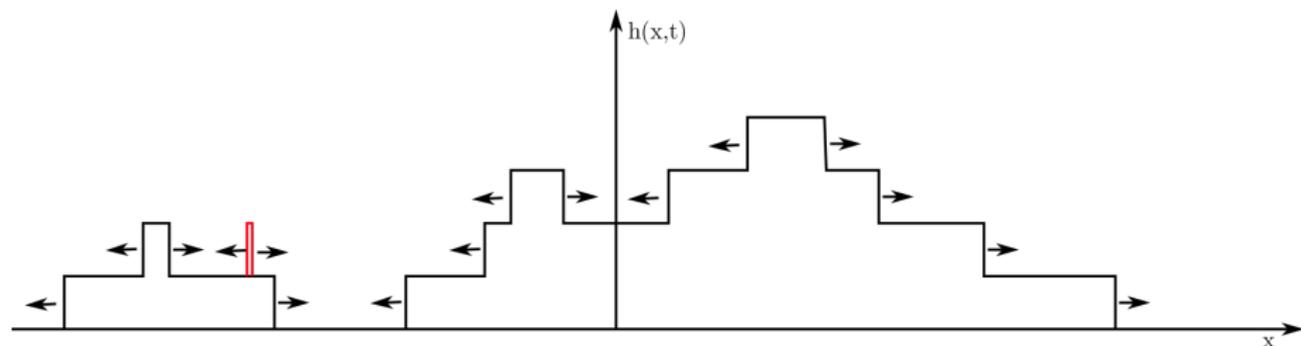
2 **Le Polynuclear Growth Model**

Un modèle résoluble : le PNG



Fonction de hauteur aléatoire $x \mapsto h(x, t) \in \mathbb{Z}$

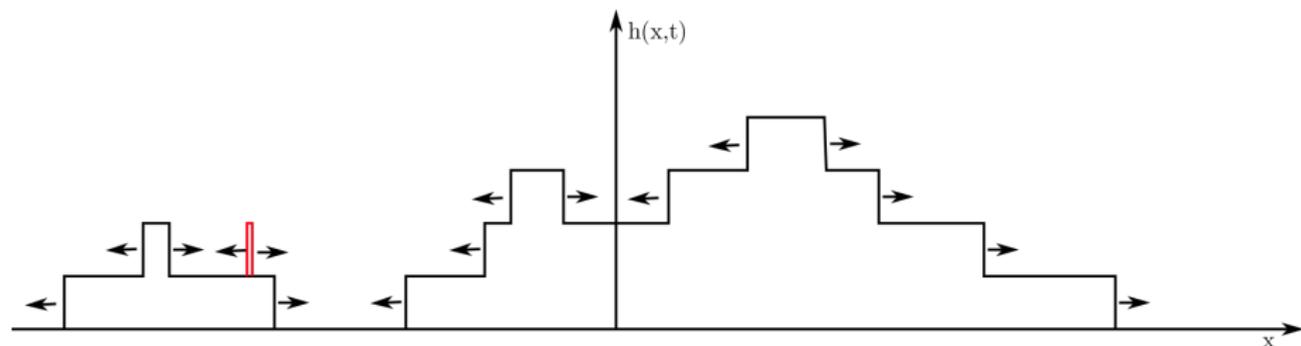
Un modèle résoluble : le PNG



Fonction de hauteur aléatoire $x \mapsto h(x, t) \in \mathbb{Z}$

- Extension latérale : Chaque terrasse s'étend latéralement à vitesse 1

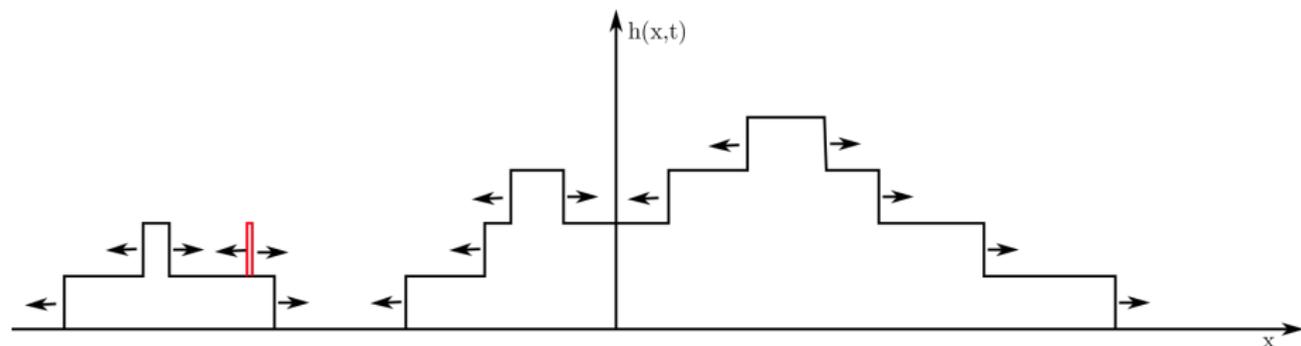
Un modèle résoluble : le PNG



Fonction de hauteur aléatoire $x \mapsto h(x, t) \in \mathbb{Z}$

- Extension latérale : Chaque terrasse s'étend latéralement à vitesse 1
- Annihilation : Lorsque deux terrasses se rencontrent, elles fusionnent

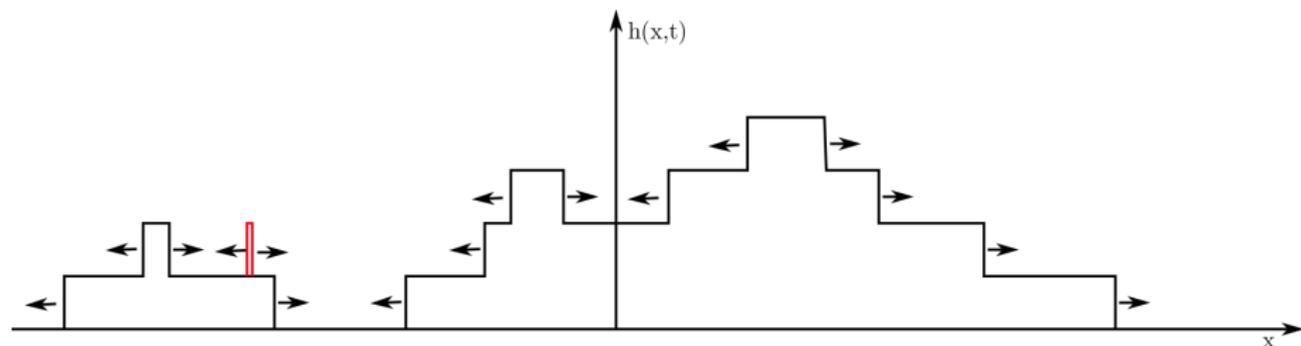
Un modèle résoluble : le PNG



Fonction de hauteur aléatoire $x \mapsto h(x, t) \in \mathbb{Z}$

- Extension latérale : Chaque terrasse s'étend latéralement à vitesse 1
- Annihilation : Lorsque deux terrasses se rencontrent, elles fusionnent
- Créations aléatoires : De nouvelles terrasses apparaissent au hasard, uniformément en espace et en temps à taux 2.

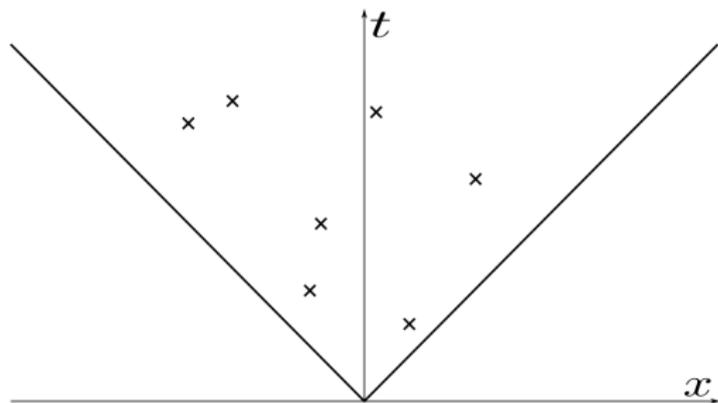
Un modèle résoluble : le PNG



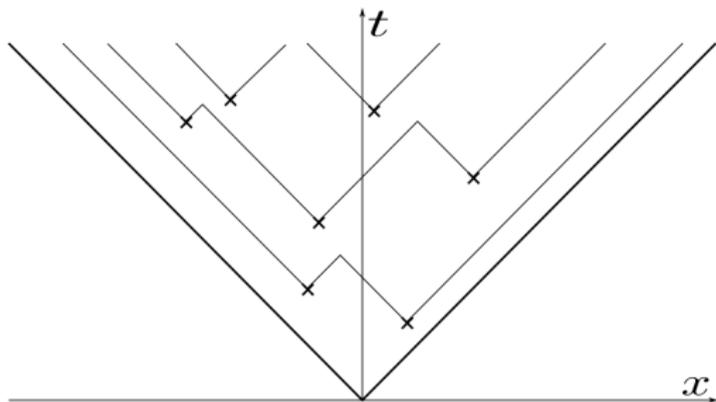
Fonction de hauteur aléatoire $x \mapsto h(x, t) \in \mathbb{Z}$

- Extension latérale : Chaque terrasse s'étend latéralement à vitesse 1
- Annihilation : Lorsque deux terrasses se rencontrent, elles fusionnent
- Créations aléatoires : De nouvelles terrasses apparaissent au hasard, uniformément en espace et en temps à taux 2.
(Processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ d'intensité 2)

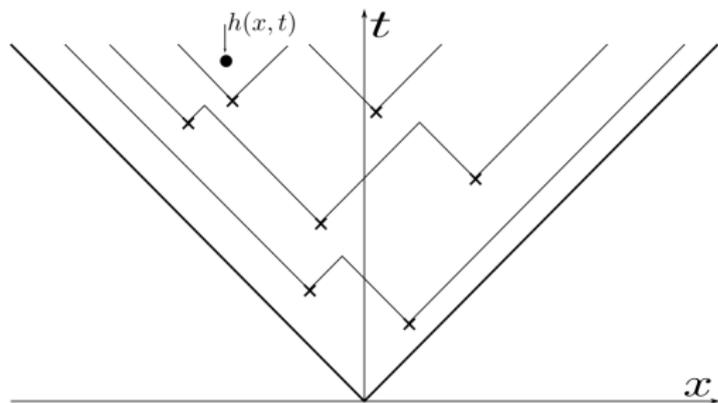
Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



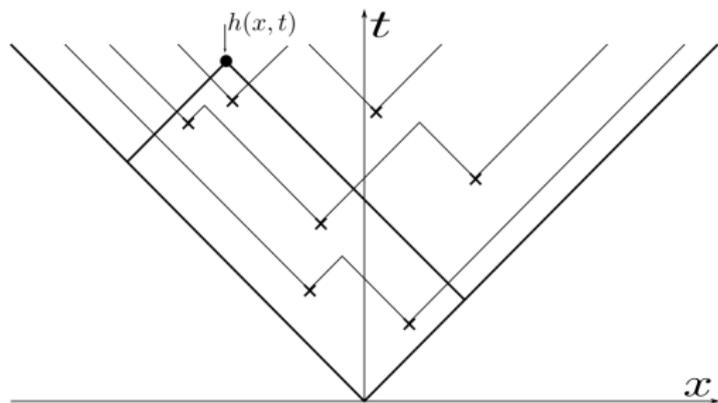
Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



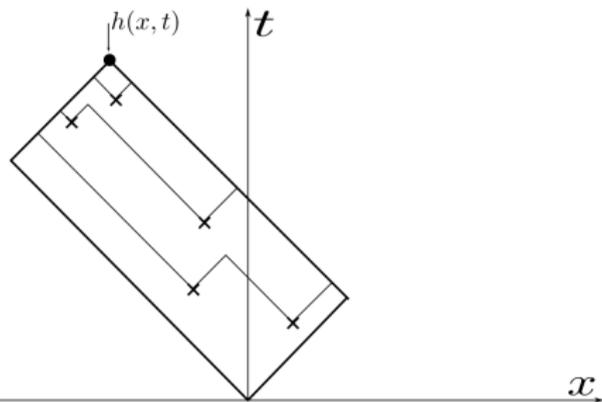
Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



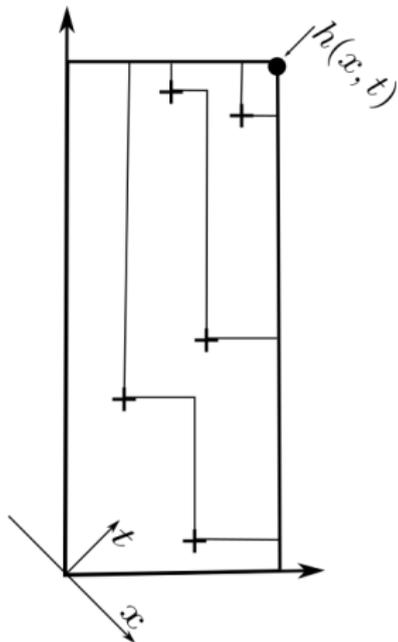
Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



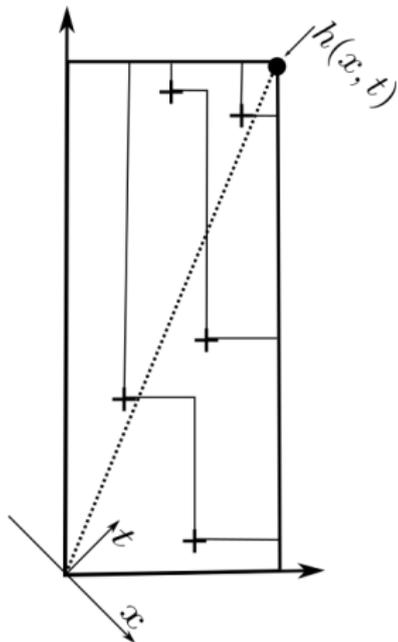
Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.

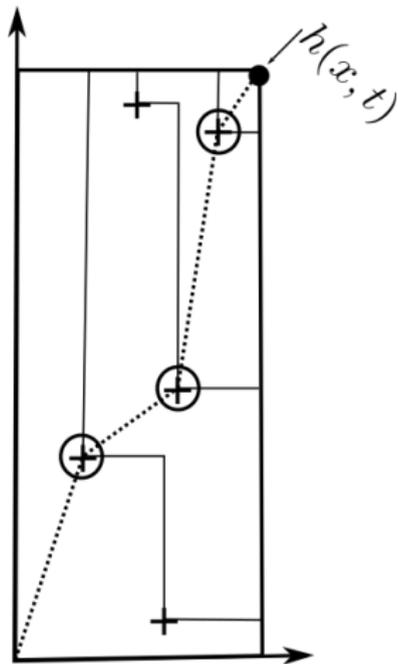


Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



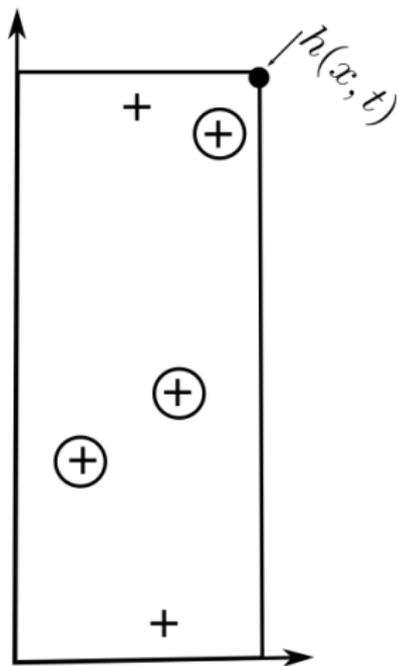
$$h(x, t) = 3$$

Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



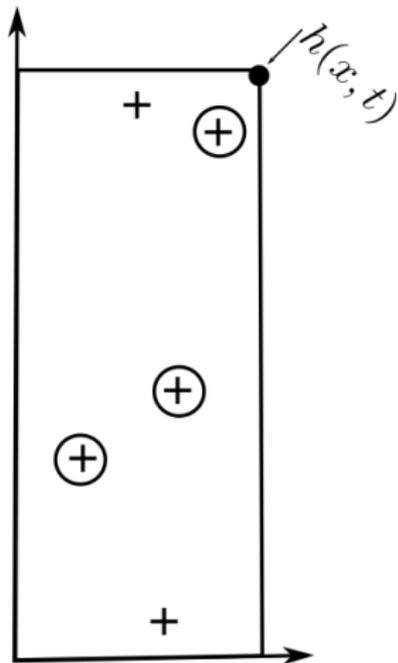
$$h(x, t) = 3$$

Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



$$h(x, t) = 3$$

Lien avec la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire.



$$h(x, t) = 3$$

En général, on peut montrer que

$$h(x, t) = L_{N_{x,t}}^{\nearrow}(\sigma),$$

où $L_{N_{x,t}}^{\nearrow}(\sigma)$ est la plus longue sous-suite croissante de la permutation induite par les coordonnées des créations dans le rectangle $R_{x,t}$.

Plus longue-sous suite croissante $L_n^{\nearrow}(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^{\nearrow}(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Plus longue-sous suite croissante $L_n^{\nearrow}(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^{\nearrow}(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Comportement asymptotique ?

Plus longue-sous suite croissante $L_n^\nearrow(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^\nearrow(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Comportement asymptotique ?

- 1961 : Problème proposé par Ulam. Conjecture que $L_n^\nearrow(\sigma) \sim c\sqrt{n}$

Plus longue-sous suite croissante $L_n^\nearrow(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^\nearrow(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Comportement asymptotique ?

- 1961 : Problème proposé par Ulam. Conjecture que $L_n^\nearrow(\sigma) \sim c\sqrt{n}$
- 1970 : Étudié par Hammersley. $\frac{1}{\sqrt{n}}L_n^\nearrow(\sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c$ avec $c \in [1, e]$

Plus longue-sous suite croissante $L_n^\nearrow(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^\nearrow(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Comportement asymptotique ?

- 1961 : Problème proposé par Ulam. Conjecture que $L_n^\nearrow(\sigma) \sim c\sqrt{n}$
- 1970 : Étudié par Hammersley. $\frac{1}{\sqrt{n}}L_n^\nearrow(\sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c$ avec $c \in [1, e]$
- 1977 : Logan-Shepp et Vershik-Kerov montrent que $c = 2$.

Plus longue-sous suite croissante $L_n^{\nearrow}(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^{\nearrow}(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Comportement asymptotique ?

- 1961 : Problème proposé par Ulam. Conjecture que $L_n^{\nearrow}(\sigma) \sim c\sqrt{n}$
- 1970 : Étudié par Hammersley. $\frac{1}{\sqrt{n}}L_n^{\nearrow}(\sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c$ avec $c \in [1, e]$
- 1977 : Logan-Shepp et Vershik-Kerov montrent que $c = 2$.
- 1999 : Baik, Deift, and Johansson trouvent l'ordre des fluctuations et calculent la loi limite

$$\frac{L_n^{\nearrow}(\sigma) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Loi}} F_{GUE}.$$

Plus longue-sous suite croissante $L_n^{\nearrow}(\sigma)$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutation uniforme,

$$L_n^{\nearrow}(\sigma) := \max\{k, \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$$

Comportement asymptotique ?

- 1961 : Problème proposé par Ulam. Conjecture que $L_n^{\nearrow}(\sigma) \sim c\sqrt{n}$
- 1970 : Étudié par Hammersley. $\frac{1}{\sqrt{n}}L_n^{\nearrow}(\sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c$ avec $c \in [1, e]$
- 1977 : Logan-Shepp et Vershik-Kerov montrent que $c = 2$.
- 1999 : Baik, Deift, and Johansson trouvent l'ordre des fluctuations et calculent la loi limite

$$\frac{L_n^{\nearrow}(\sigma) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Loi}} F_{GUE}.$$

PNG droplet : $h(x, t) = L_{N_{x,t}}^{\nearrow}(\sigma)$ avec $N_{x,t} \sim t^2 - x^2$ d'où

$$\boxed{\frac{h(0, t) - 2t}{t^{1/3}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} F_{GUE}}$$

Limite hydrodynamique.

Theorem 1

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Si $(h_n(\cdot, 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de hauteur initiale telle que

$$\frac{1}{n} h_n(nx, 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x),$$

uniformément sur tout compact, alors pour tout $t > 0$,

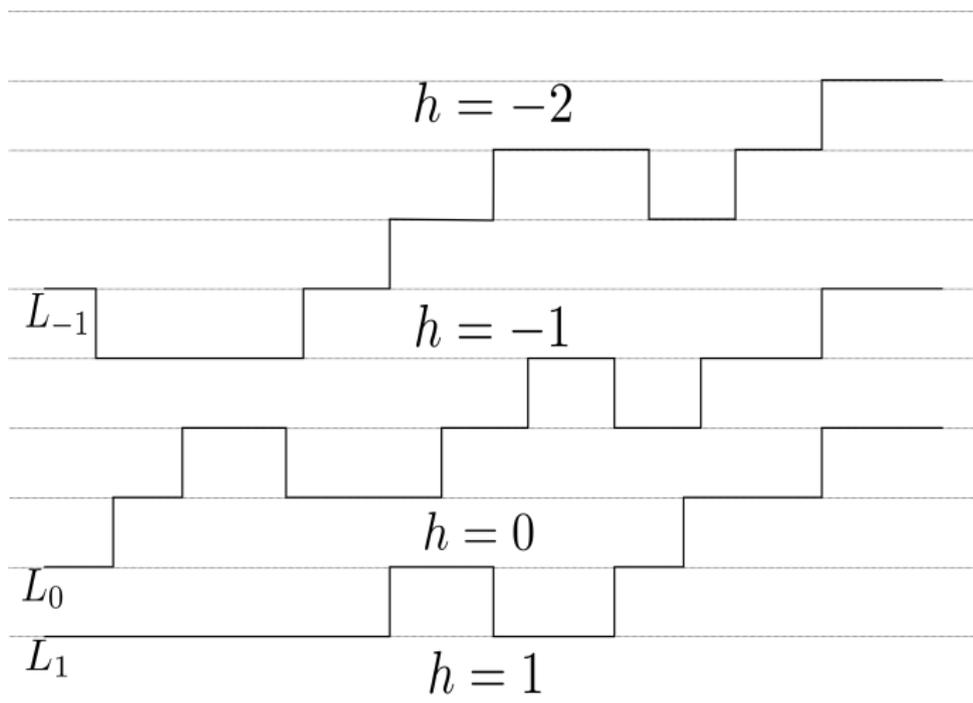
$$\frac{1}{n} h_n(nx, nt) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} u(x, t),$$

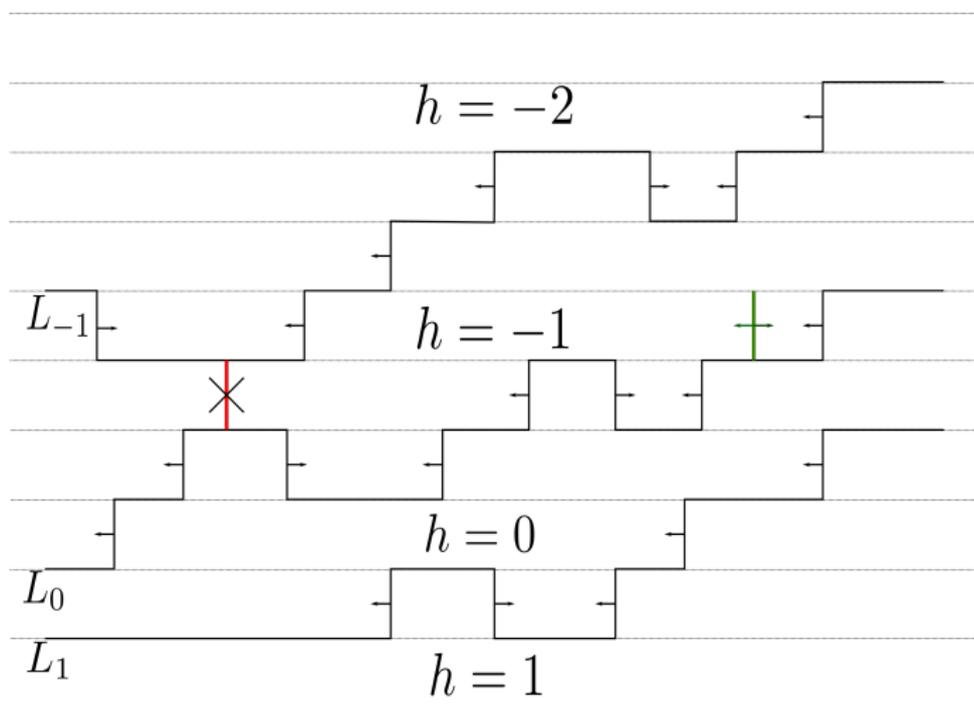
uniformément sur tout compact où u est l'unique solution de viscosité de l'EDP de type Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t u = v(\partial_x u) \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

avec $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $v(\rho) := \sqrt{4 + \rho^2}$.

Merci pour votre attention !

Modèle de Gates-Westcott ($d=2$)

Modèle de Gates-Westcott ($d=2$)

- Chaque ligne suit la dynamique du PNG
- Les lignes n'ont pas le droit de se toucher