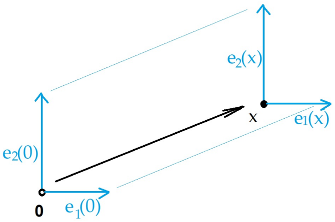
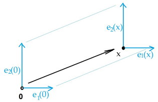
Géométries de Cartan branchées : introduction et questions ouvertes.

15 mai 2019

Origine : modèle affine [Euclide]



Propriétés essentielles

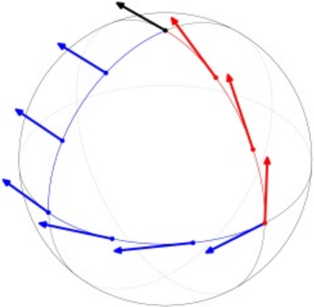


- Identification de chaque $T_x\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n = T_0\mathbb{R}^n$ via le **transport parallèle**
- Le **transport parallèle** ne dépend pas du chemin de 0 à x : notion de structure **plate** (courbure)
- Propriétés précédentes invariantes par une transformation globale affine de $\mathbb{R}^n$ (équivariance).

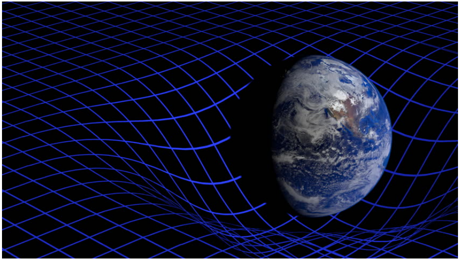
Géométrie riemanienne : transports parallèles non plats

- Il a été rapidement question (ex : en physique, relativité) d'étudier d'autres transports parallèles : notion de **connexion affine** [Cartan].
- Souvent, une telle connexion provient d'une **métrique** (i.e choix d'un produit scalaire sur chaque $T_x M$) [Levi-Civita]
- A isométrie près, une telle connexion est caractérisée par sa **courbure** [Riemann, Ambrose,Hicks]

Géométrie riemanienne : exemple de la révolution Galiléenne et Einsteinienne



La Terre n'admet pas de connexion affine plate



La gravitation comme courbure d'une connexion affine

Et "pendant ce temps" : programme d'Erlangen, [Klein]

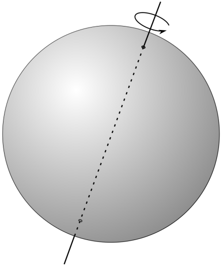
- Parallèlement, d'autres **géométries** sont étudiées : i.e d'autres **ensemble de propriétés des figures** stables par certaines **transformations** (ex : géométrie projective).
- Klein (programme d'Erlangen) propose de considérer les **groupes de transformations** G(en général des groupes de Lie) associés comme à la fois **espace** sur lequel agit les transformations (par composition) et comme **groupe agissant**.

Et "pendant ce temps" : programme d'Erlangen, [Klein]

Conséquences :

- Apparition de nouveaux "espaces" support pour les géométries : **espace homogène** G/H.
- La classification des groupes de Lie semi-simples G (Cartan) et leur sous-groupes H permet de classifier les **espaces homogènes**

Et "pendant ce temps" : programme d'Erlangen, [Klein]



La sphère vue comme espace homogène $SO(3,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$

L'idée de Cartan : unifier les deux notions

Cartan remarque alors que les deux notions ne sont pas étrangères : il y a une sorte de transport parallèle dans les deux cas.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\mathit{Affine}} \arrow[r, "\mathit{Erlangen}"] \arrow[d, "\mathit{Riemann, Gauss, \ldots}"'] & \boxed{\mathit{Klein}\ (G,H)} \arrow[d, "\mathit{Cartan}"] \\
\boxed{(M,\nabla)\ \mathit{RiemaniannGeometry}} \arrow[r, "\mathit{Cartan}"'] & \boxed{\mathit{Cartan\ Geometries}\,(E,\omega)}
\end{tikzcd}
$$

Notion de Géométrie de Cartan

Definition

(Géométrie de Cartan modelée sur (G, H)) H-fibré à droite E au dessus de M (i.e $\pi : E \longrightarrow M$) muni d'une connexion de Cartan $\omega : TE \longrightarrow E \times \mathfrak{g}$, vérifiant :

(i) $\omega(e)(T_e E) \simeq \mathfrak{g}$

(ii) $\omega(e)(\frac{d}{dt}|_{t=0} e \cdot exp(tY)) = Y \ \forall Y \in \mathfrak{h}$

Remarque : La condition (i) signifie qu'il y a identification entre $T_x M$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Notion de Géométrie de Cartan

	Connexion affine	Géométrie Klein (G,H)
Variété	M	$X := G/H$
Modèle	$(Aff(\mathbb{R}^n), GL_n(\mathbb{R}))$	(G, H)
H-fibré	E=repères	$E = G$
Connexion Cartan	$\omega = \Theta \oplus \omega_{\mathfrak{h}}$	$\omega = \omega_G$ Maurer Cartan

Géométrie de Cartan holomorphes branchées [S. Dumitrescu, I.Biswas]

Même définition mais (i) n'est vérifiée qu'en dehors d'un divisuer D de M.

Courbure

Definition

(Courbure d'une géométrie de Cartan)

$$K\omega := d\omega + [\omega, \omega]$$

Remarque : Objet central : Normalisation, Classification, Automorphismes

Theorem

(M, E, ω) *localement modelée sur* $G/H \iff K\omega = 0$

Sujet d'étude

Question : Etant donné un modèle (G, H) et une dimension fixée, quelles variétés M (complexes compactes) peuvent admettre une géométrie (éventuellement branchée) (E, ω) modelée sur (G, H) ?

Les résultats type "classes caractéristiques"

- **Dimension 1, affine ou projective :** En fonctions du signe de la **courbure**. Par exemple, la sphère est la seule courbe de courbure négative. Structures projectives : quotient d'un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
- **Dimension 2, affine :** Inoue et Kobayashi, 1980 : liste des surfaces compactes (complexes) avec une connexion affine holomorphe. **Surfaces affines**.
  Outil : **Relation** $\boxed{c_1(M) = c_2(M) = 0}$.
- **Dimension 3, projective :** Kobayashi et Ochiai, 1980 : **uniformisation** des surfaces compactes (complexes)avec une structure projective.
  Outil : **Relation entre classes de Chern**

$$\boxed{c_1^2(M) = 3c_2(M)}$$

Les résultats type “homogéinité’ locale”

Dimensions supérieures, géométries de type algèbrique :

S.Dumitrescu donne un résultat d'**uniformisation** des variétés **Calabi-Yau** (i.e $c_1(M) = 0$) admettant une géométrie de Cartan avec un modèle algèbrique.

Outil : $\boxed{\textbf{homogéinité locale}}$ sur un ouvert dense .