Calcul des tresses

Jean Fromentin

Laboratoire LMPA
Université du Littoral, Calais

Patrick Dehornoy

Patrick Dehornoy – Le calcul des tresses

C&M Calvage & Mounet

Patrick Dehornoy

Le calcul des tresses

Une introduction, et au-delà

Les tresses servent-elles uniquement à faire de belles coiffures et de jolis dessins, ou recèlent-elles aussi une structure cachée digne d'intérêt ? Comme la formulation le laisse deviner, le but de ce petit livre est de montrer qu'il existe toute une théorie des tresses, fondée sur des intuitions venues de la topologie, de l'algèbre, et de la géométrie, et se prolongeant en de multiples ramifications, avec même des applications possibles en crytographie. Un accent particulier est mis sur les aspects effectifs et la construction d'algorithmes qui constituent un véritable calcul des tresses à la fois semblable et très différent de celui des nombres.

Le point de vue retenu ici est d'explorer le monde des tresses en ne supposant aucune connaissance au-delà d'une première année d'université, et de fournir pour toutes les affirmations proposées à la fois des explications heuristiques et des démonstrations précises. Un grand choix d'exercices complète le texte, avec des solutions disponibles sur internet.

Patrick Dehornoy est professeur émérite à l'université de Caen, membre honoraire de l'Institut Universitaire de France, et il est un des meilleurs spécialistes mondiaux de l'étude des groupes de tresses, à laquelle il a apporté des contributions majeures.

ISBN: 978-2-9163-5279-4
Format: 20 x 14 cm
Nbre pages: 224
Reliure: broché
Prix: 17 €
En librairie: juillet 2019

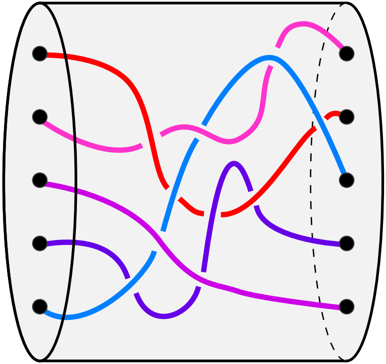
Collection: Nano
www.calvage-et-mounet.fr

Tresse géométrique

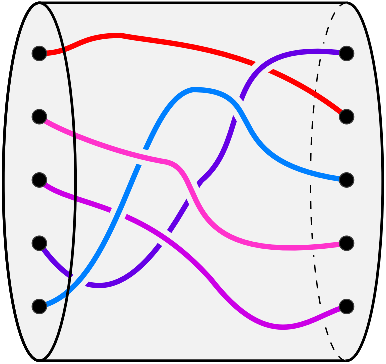
Une tresse géométrique (ou photo de tresse) est :

Tresse géométrique

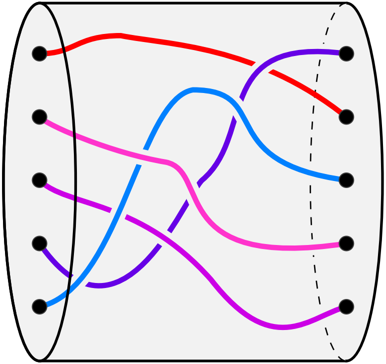
Une tresse géométrique (ou photo de tresse) est :



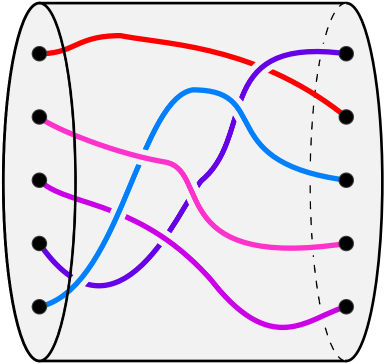
Déformation



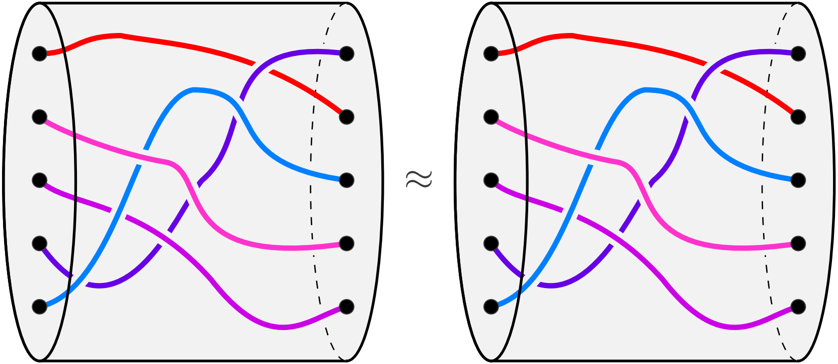
Déformation



$\approx$

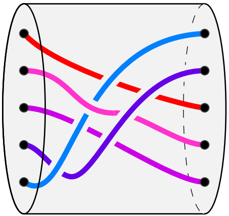


Déformation

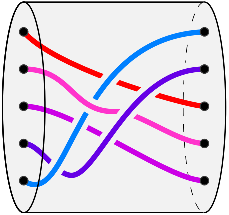


Multiplication

Multiplication

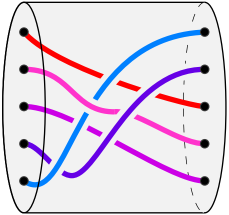


Multiplication

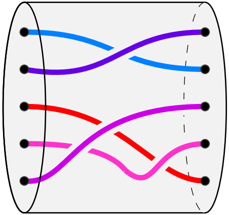


$\times$

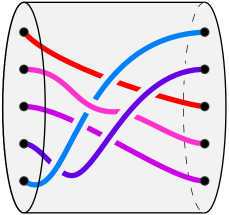
Multiplication



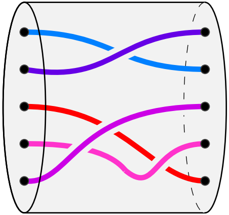
$\times$



Multiplication

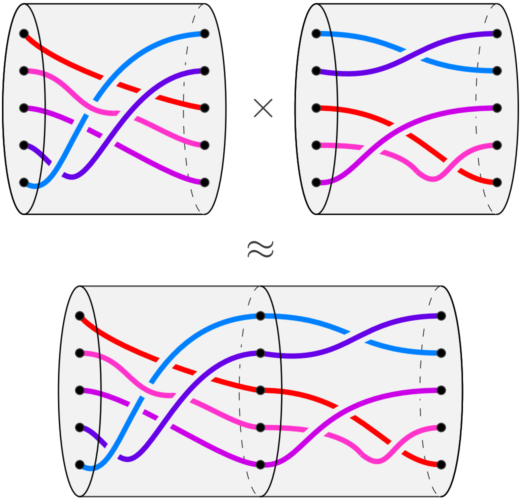


$\times$

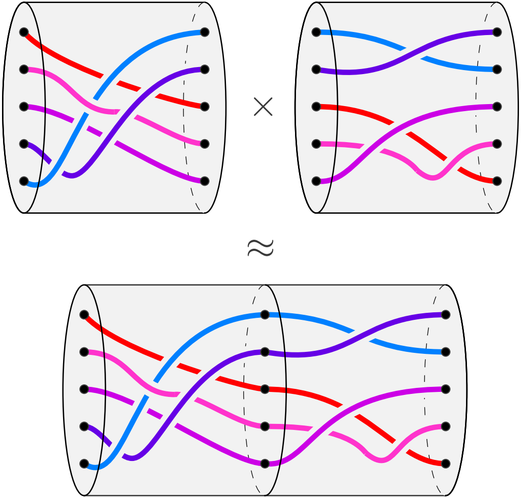


$\approx$

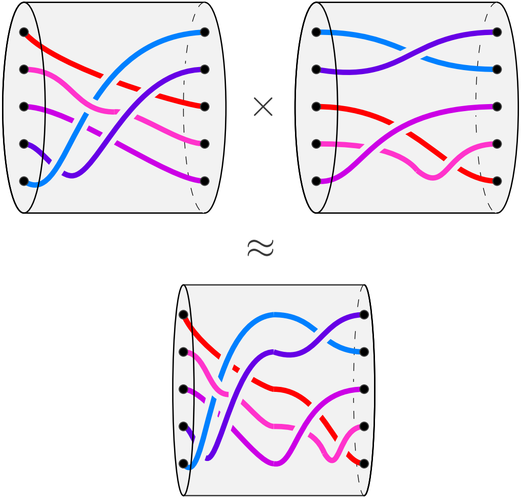
Multiplication



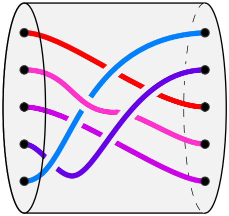
Multiplication



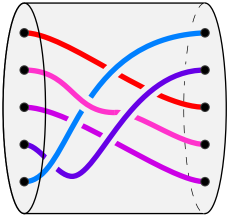
Multiplication



Neutre

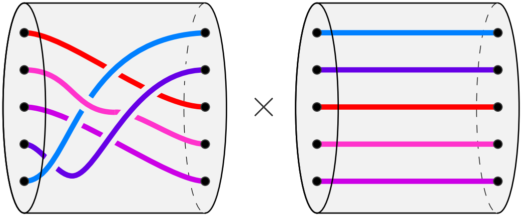


Neutre

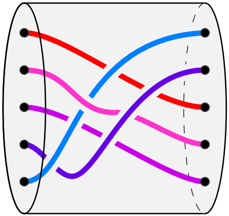
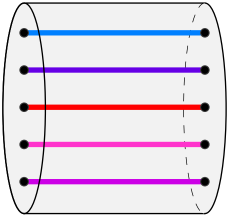


$\times$

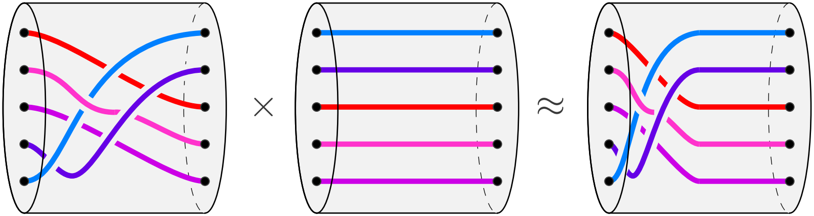
Neutre



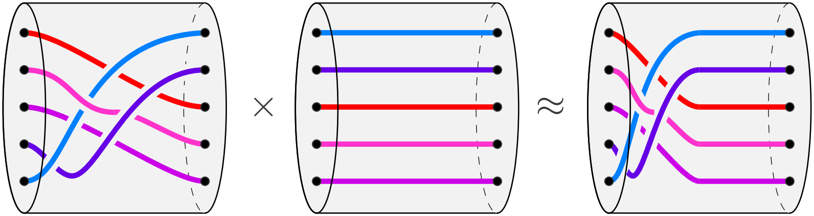
Neutre

 $\times$  $\approx$

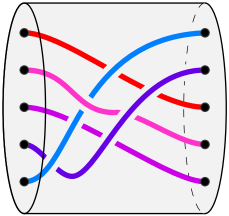
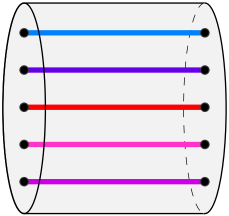
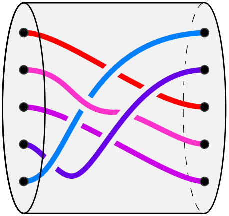
Neutre

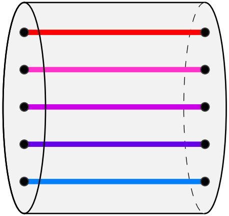
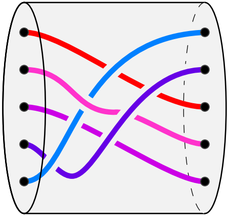


Neutre

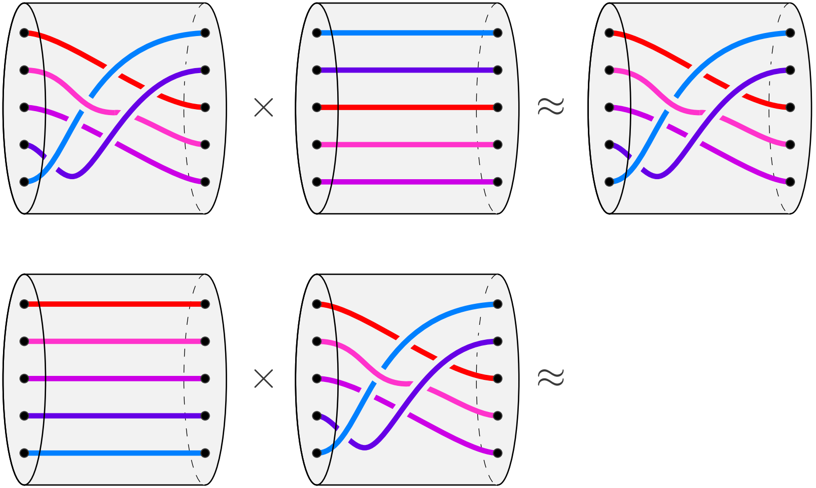


Neutre

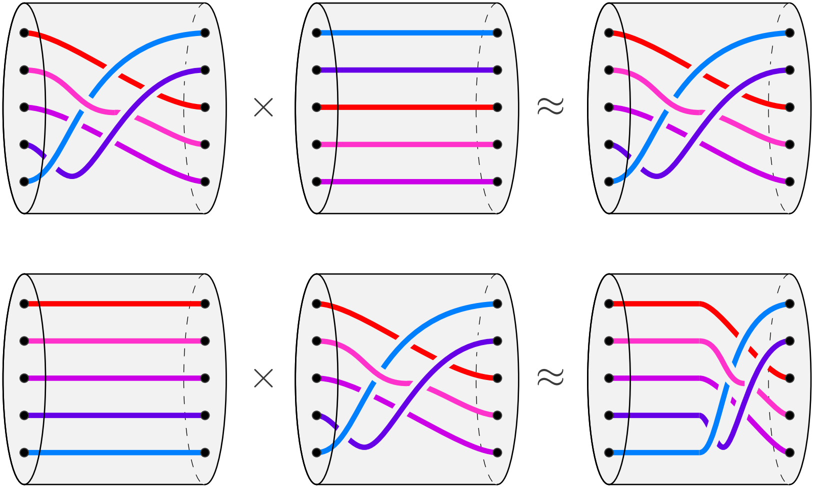
 $\times$  $\approx$ 

 $\times$ 

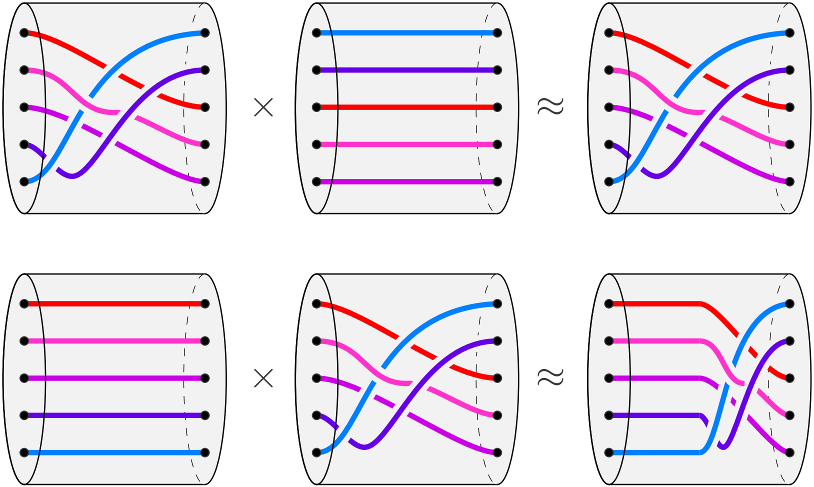
Neutre



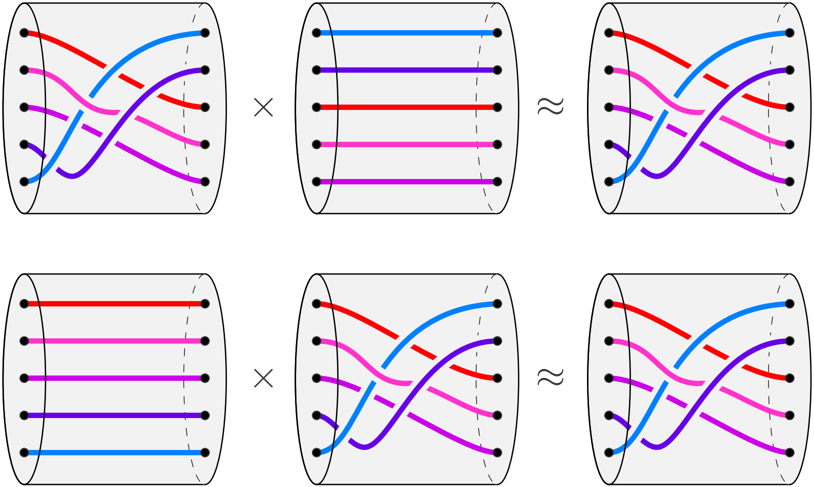
Neutre



Neutre

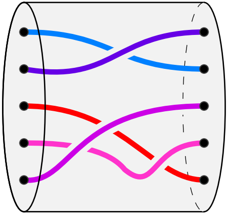


Neutre

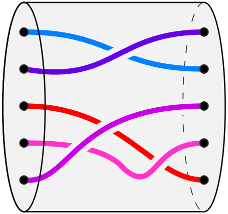


⇝ La tresse triviale est notée 1.

Inverse

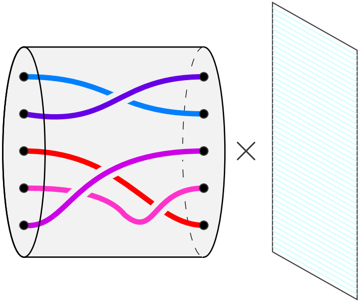


Inverse

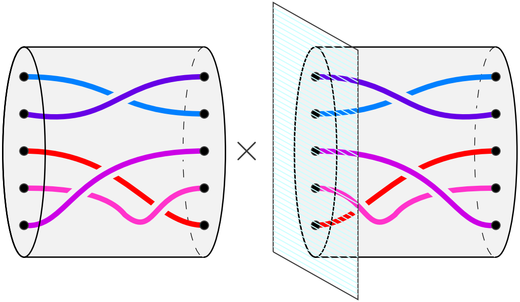


$\times$

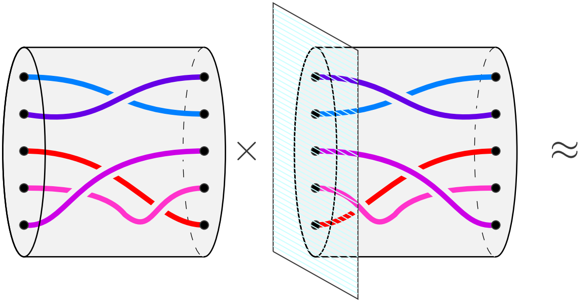
Inverse



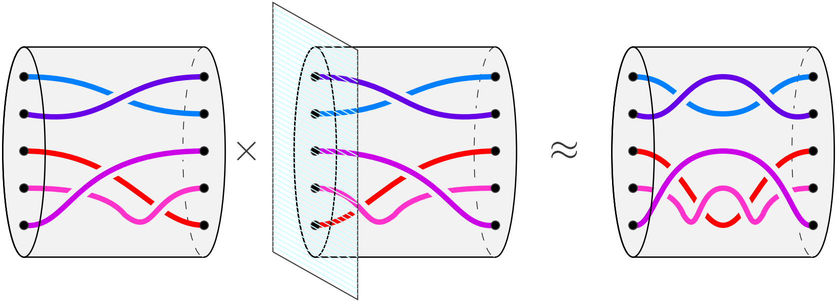
Inverse



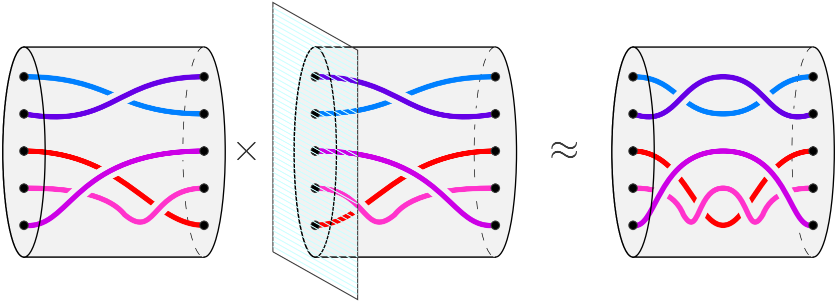
Inverse



Inverse



Inverse



Groupe de tresses

Groupe de tresses

- Definition :

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition :

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin en 1925.

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin en 1925.

$\rightsquigarrow$ Ils semblaient déjà connus par

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

  $\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin en 1925.

  $\rightsquigarrow$ Ils semblaient déjà connus par Adolph Hurwitz

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin en 1925.

$\rightsquigarrow$ Ils semblaient déjà connus par Adolph Hurwitz en 1891.

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin en 1925.

$\rightsquigarrow$ Ils semblaient déjà connus par Adolph Hurwitz en 1891.

- Problème : Comment décider si une tresse quelconque est triviale ?

Groupe de tresses

- Definition : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- Proposition : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses $\times$ et de la tresse triviale est un (groupe).

$\rightsquigarrow$ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par Emil Artin en 1925.

$\rightsquigarrow$ Ils semblaient déjà connus par Adolph Hurwitz en 1891.

- Problème : Comment décider si une tresse quelconque est triviale ?

$\rightsquigarrow$ De manière générale, comment calculer avec les tresses ?

Présentation de monoïde – Mots

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

- $\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
- $\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\leadsto$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\leadsto$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple :

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  - $u = bonjour$

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  - $u = bonjour$ appartient à A^*,

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  - $u = bonjour$ appartient à A^*,
  - $v = Bonjour$

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  - $u = bonjour$ appartient à A^*,
  - $v = Bonjour$ n'appartient pas à A^*.

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

- $\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
- $\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  - $u = bonjour$ appartient à A^*,
  - $v = Bonjour$ n'appartient pas à A^*.

La longueur d'un A-mot est son nombre de lettres.

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

- $\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
- $\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

• Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
– $u = bonjour$ appartient à A^*,
– $v = Bonjour$ n'appartient pas à A^*.

La longueur d'un A-mot est son nombre de lettres.

• Exemple :

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

$\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
$\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  – $u = bonjour$ appartient à A^*,
  – $v = Bonjour$ n'appartient pas à A^*.

La longueur d'un A-mot est son nombre de lettres.

- Exemple : La longueur du mot $u = bonjour$ est

Présentation de monoïde – Mots

Un mot est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A.
On dit que w est un A-mot.

- $\rightsquigarrow$ A est appelé alphabet et ses éléments lettres.
- $\rightsquigarrow$ on note A^* l'ensemble des A-mots.

- Exemple : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, ..., z\}$
  - $u = bonjour$ appartient à A^*,
  - $v = Bonjour$ n'appartient pas à A^*.

La longueur d'un A-mot est son nombre de lettres.

- Exemple : La longueur du mot $u = bonjour$ est 7.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition :**

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple :

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca$

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = ababc \circ ca = abababcca$

  $u \circ (v \circ w)$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$

  $u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca)$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = ababab cca$

  $u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$

  $u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$

  $u \circ \varepsilon$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = ababab c \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = ababab c \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = ababab c \circ ca = abababcca$

$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$

$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba$ et $\varepsilon \circ u$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = ababab c \circ ca = abababcca$

  $u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$

  $u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba$ et $\varepsilon \circ u = \varepsilon \circ aba$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi $\circ$ sur A^* par $u \circ v = u\,v$ la concaténation de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- Proposition : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un monoïde.

- Exemple : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

  $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = ababab cca$

  $u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babcca = abababcca$

  $u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba$ et $\varepsilon \circ u = \varepsilon \circ aba = aba$.

Relation

Soit A un alphabet.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v)

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w =$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et}$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' =$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si
$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$
ou réciproquement.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si
$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$
ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple :

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

• Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^{+} w'$.

• Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

– on a $aabaa$ $abaaa$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
  – on a $aabaa \qquad abaaa$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
  – on a $aabaa \equiv^+ abaaa$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
  - on a $aabaa \equiv^+ abaaa$,
  - on a $abba \qquad abab$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
  - on a $aabaa \equiv^+ abaaa$,
  - on a $abba \quad abab$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
  - on a $aabaa \equiv^+ abaaa$,
  - on a $abba \equiv^+ abab$,
  - on a $aaa \quad aba$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une relation de mots est un couple (u, v) de A-mots. On la note $u = v$.

- Exemple : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont équivalents pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- Exemple : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
  - on a $aabaa \equiv^+ abaaa$,
  - on a $abba \equiv^+ abab$,
  - on a $aaa \not\equiv^+ aba$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit
$$M = \langle A \mid R \rangle^{+}$$
comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle A \,|\, R \rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit
$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$
comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple :

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle A \,|\, R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle \quad | \qquad\qquad \rangle^+$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,| \qquad \rangle^{+}$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit
$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$
comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit
$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$
comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \ldots\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \ldots\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit
$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$
comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon\rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \ldots\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^{+}$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \ldots\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle A \,|\, R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A-mots, on définit

$$M = \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R.

- Exemple : Prenons $M = \langle a \,|\, aaa = \varepsilon \rangle^+$.
  - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$.
  - Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa\}$.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple :

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle^{+}.$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors :

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}\,.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a =$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 =$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{k}$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ ... \circ a}_{k} \mapsto k$.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{k} \mapsto k$.

  Finalement

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{k} \mapsto k$.

  Finalement
  $$\mathbb{N} \simeq \langle$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \,|\, R \rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ ... \circ a}_{k} \mapsto k$.

  Finalement
  $$\mathbb{N} \simeq \langle a$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ ... \circ a}_{k} \mapsto k$.

  Finalement
  $$\mathbb{N} \simeq \langle\, a \,|$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{N}$

- Exemple : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

  Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \ldots \circ a}_{k} \mapsto k$.

  Finalement
  $$\mathbb{N} \simeq \langle\, a \,|\, \emptyset \,\rangle^+.$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple :

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+} .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ?

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a ... a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 =$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle^{+} .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1)$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+} .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et 0

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.
  $\rightsquigarrow$ on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \,|\, R \rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.
  $\rightsquigarrow$ on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

  Finalement

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.
  $\rightsquigarrow$ on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

  Finalement
  $$\mathbb{Z} \simeq \langle$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^{+}.$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.
  $\rightsquigarrow$ on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

  Finalement
  $$\mathbb{Z} \simeq \langle\, a,\ b$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.
  $\rightsquigarrow$ on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

  Finalement
  $$\mathbb{Z} \simeq \langle\, a,\ b \,|$$

Présentation de monoïdes - $\mathbb{Z}$

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

  Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
  $$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle^+ .$$

  On a alors $i \mapsto a^i = a...a$ de longueur i.

  Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

  On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.
  $\rightsquigarrow$ on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

  Finalement
  $$\mathbb{Z} \simeq \langle\, a,\ b \,|\, ab = \varepsilon,\ ba = \varepsilon \,\rangle^+.$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) =$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\, a \in A \right\}$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\ a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\ a \in A \right\}$.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\ a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\ a \in A \right\}$.

- Exemple : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \,|\, R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \,|\, R \cup R_G(A) \right\rangle^+,$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\, a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\, a \in A \right\}$.

- Exemple : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a,\, b \,|\, ab = \varepsilon,\, ba = \varepsilon \rangle^+$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\ a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\ a \in A \right\}$.

- Exemple : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a,\ b \mid ab = \varepsilon,\ ba = \varepsilon \rangle^{+} = \langle a \mid \ \rangle .$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \,|\, R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \,|\, R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\, a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\, a \in A \right\}$.

- Exemple : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a,\, b \,|\, ab = \varepsilon,\, ba = \varepsilon \rangle^{+} = \langle a \,|\, \ \rangle .$$

Groupes libres d'ordre $n \geq 1$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\, a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\, a \in A \right\}$.

- Exemple : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a,\, b \mid ab = \varepsilon,\, ba = \varepsilon \rangle^{+} = \langle a \mid \ \rangle .$$

Groupes libres d'ordre $n \geq 1$

$$F_n = \langle a_1, \ldots, a_n \mid \ \rangle$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A.
Un $A^{\pm}$-mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de $A^{\pm}$-mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \left\langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \right\rangle^{+},$$

où $R_G(A) = \left\{ aa^{-1} = \varepsilon,\ a \in A \right\} \cup \left\{ a^{-1}a = \varepsilon,\ a \in A \right\}$.

- Exemple : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a,\ b \mid ab = \varepsilon,\ ba = \varepsilon \rangle^{+} = \langle a \mid\ \rangle .$$

Groupes libres d'ordre $n \geq 1$

$$F_n = \langle a_1, \ldots, a_n \mid\ \rangle$$

On observe $\mathbb{Z} \simeq F_1$.

Diagramme de tresses

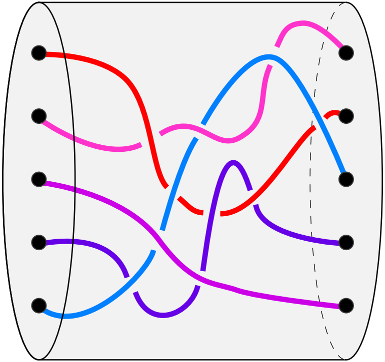
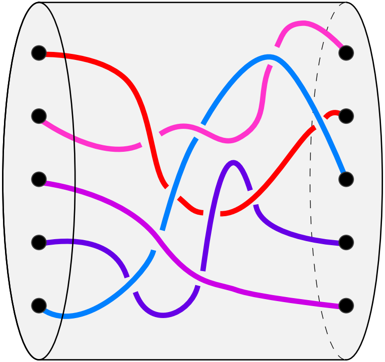


Diagramme de tresses



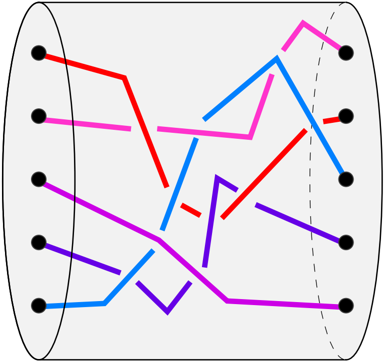
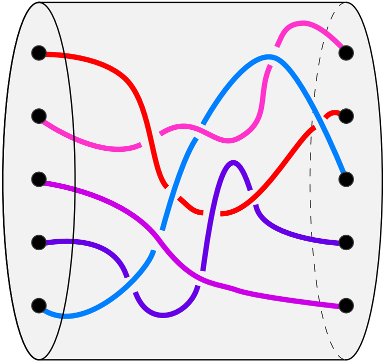


Diagramme de tresses



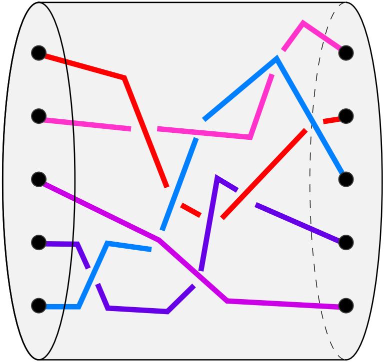


Diagramme de tresses

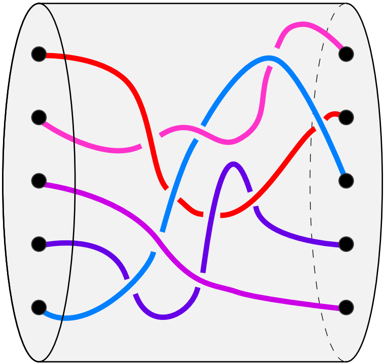
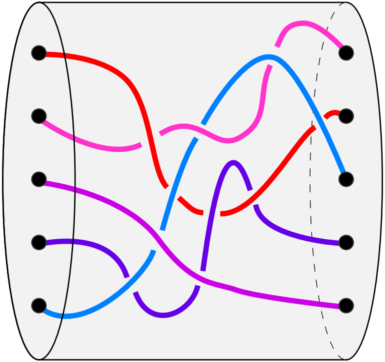


Diagramme de tresses



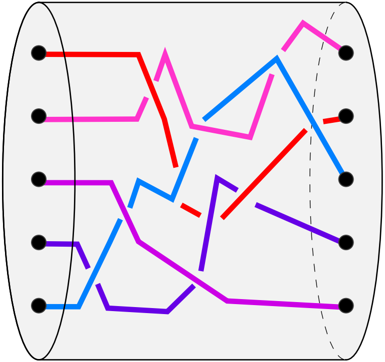
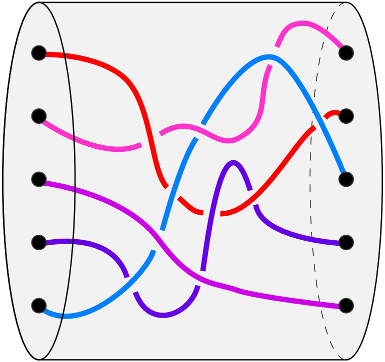


Diagramme de tresses



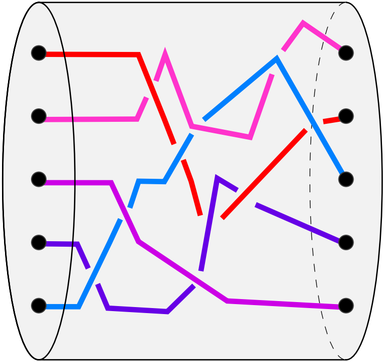
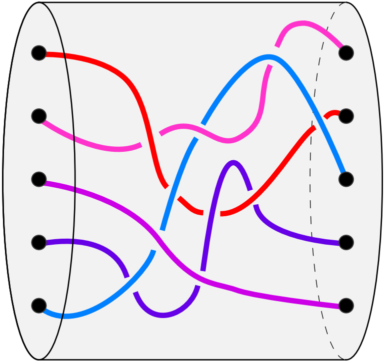


Diagramme de tresses



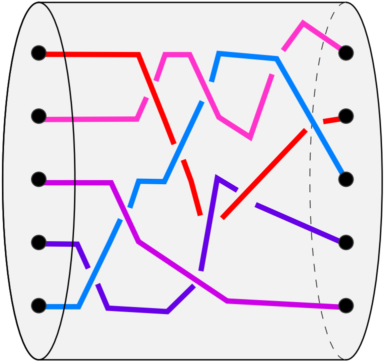
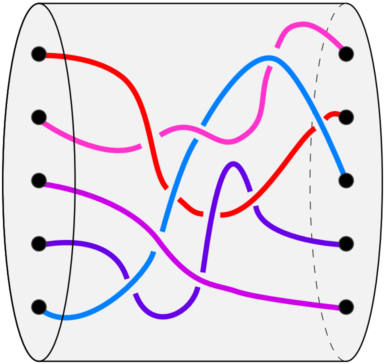


Diagramme de tresses



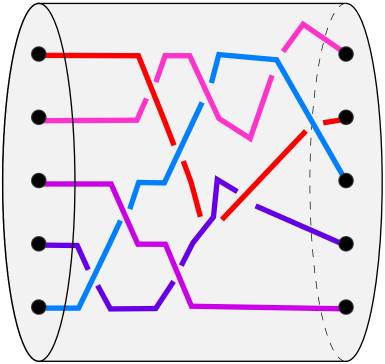
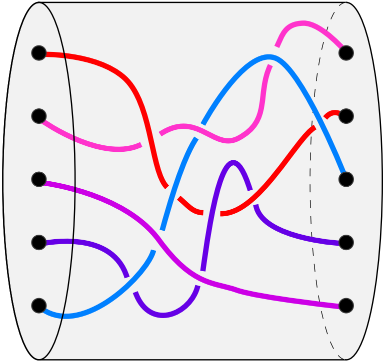


Diagramme de tresses



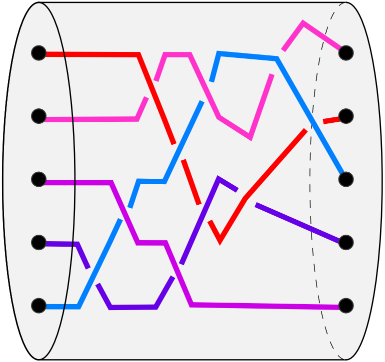
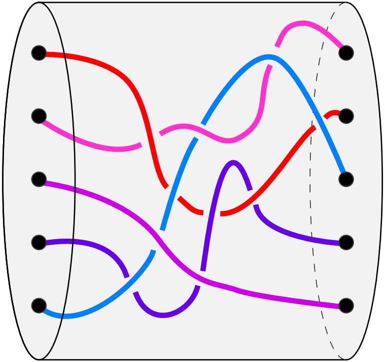


Diagramme de tresses



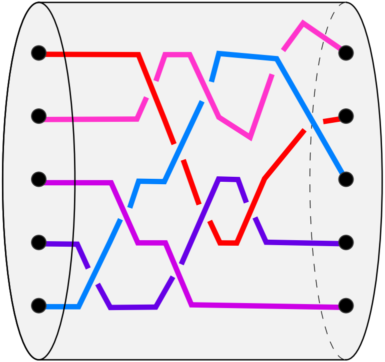


Diagramme de tresses

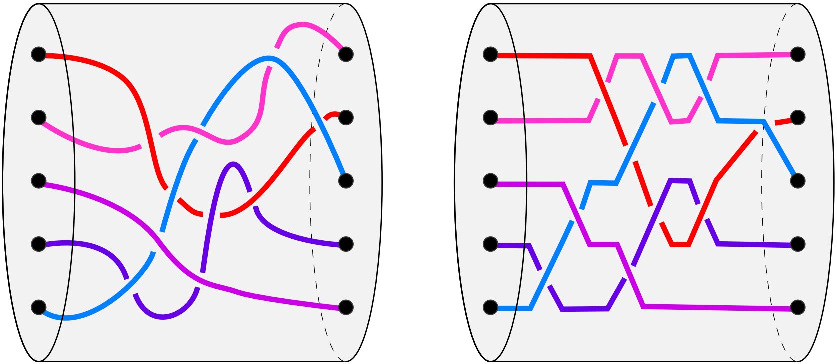
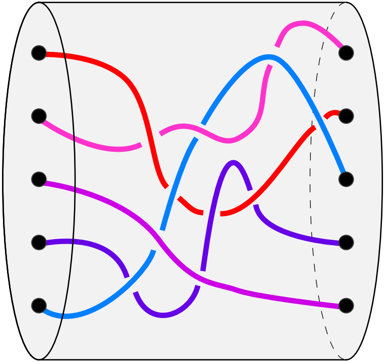


Diagramme de tresses



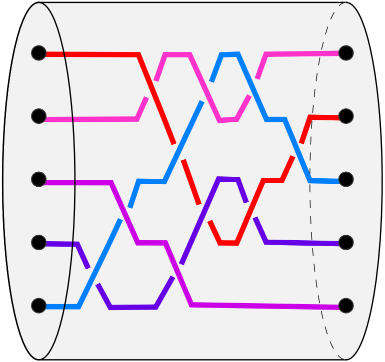


Diagramme de tresses

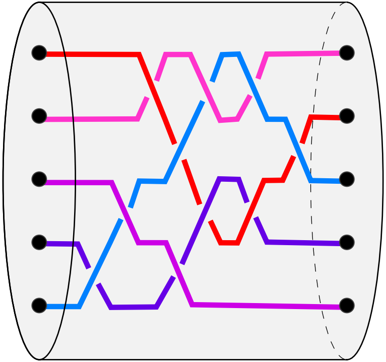


Diagramme de tresses

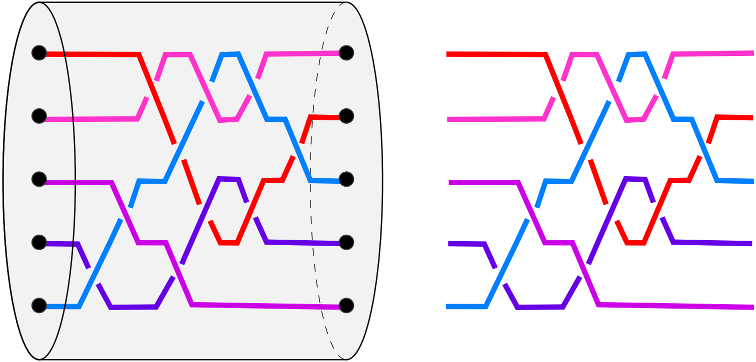


Diagramme de tresses

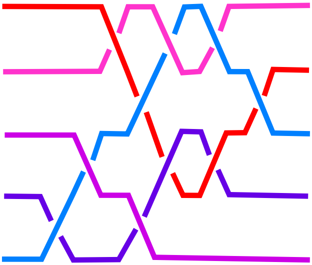
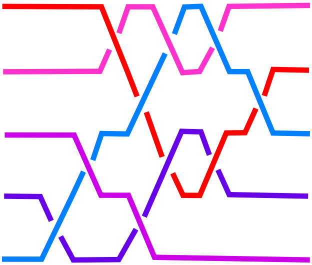


Diagramme de tresses



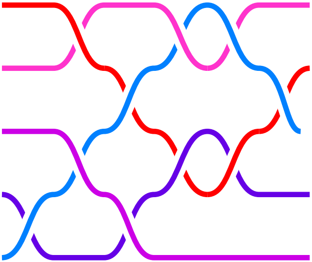


Diagramme de tresses

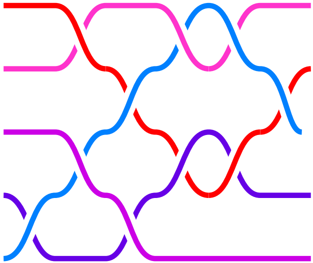


Diagramme de tresses

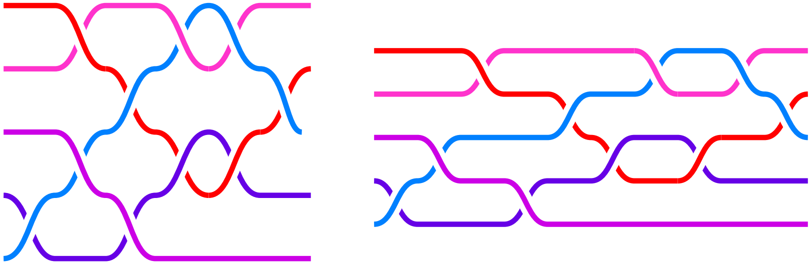


Diagramme de tresses

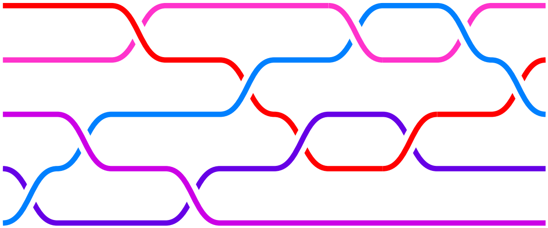


Diagramme de tresses

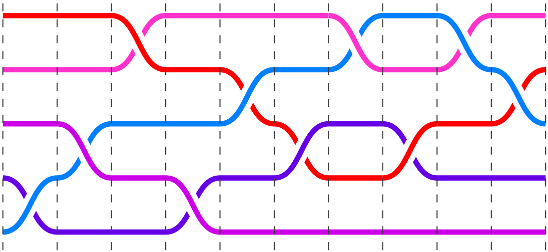
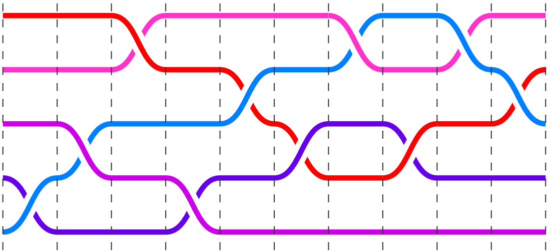


Diagramme de tresses



σ_1

Diagramme de tresses

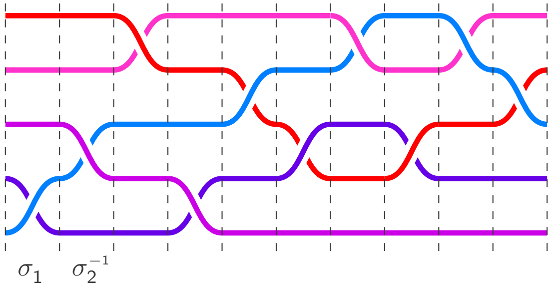


Diagramme de tresses

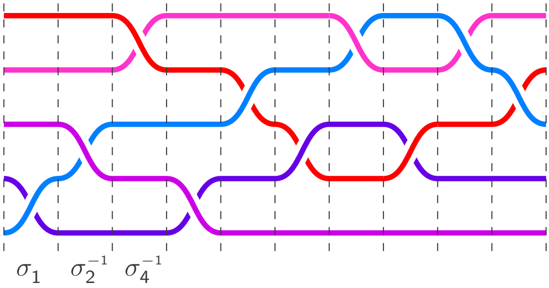


Diagramme de tresses

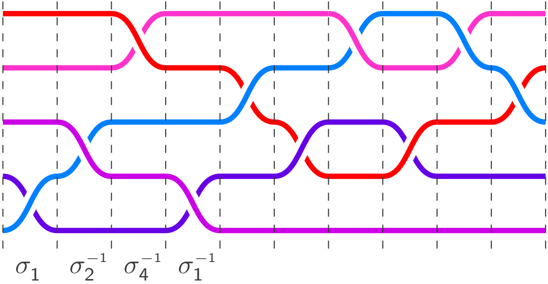


Diagramme de tresses

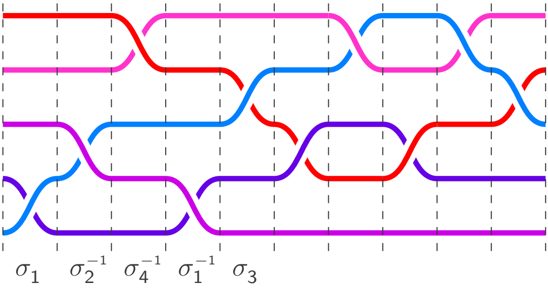
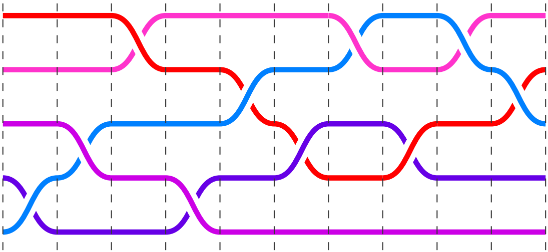


Diagramme de tresses



$\sigma_1 \quad \sigma_2^{-1} \quad \sigma_4^{-1} \quad \sigma_1^{-1} \quad \sigma_3 \quad \sigma_2$

Diagramme de tresses

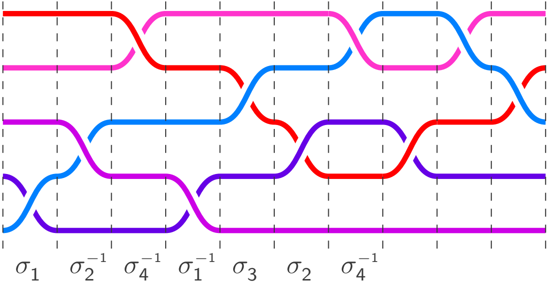


Diagramme de tresses

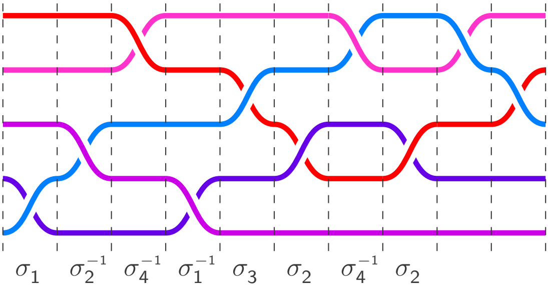


Diagramme de tresses

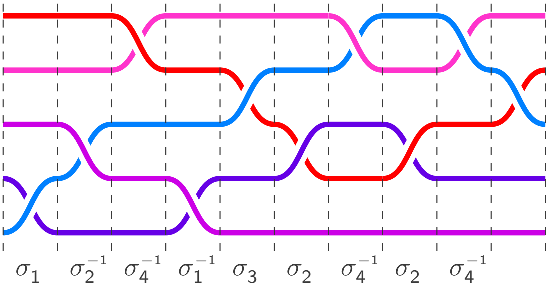
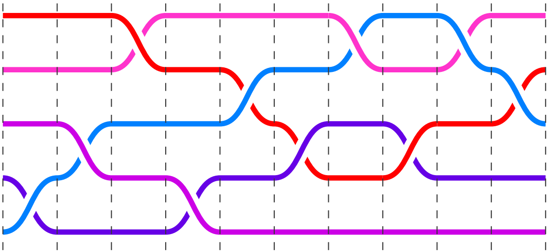


Diagramme de tresses



$\sigma_1 \quad \sigma_2^{-1} \quad \sigma_4^{-1} \quad \sigma_1^{-1} \quad \sigma_3 \quad \sigma_2 \quad \sigma_4^{-1} \quad \sigma_2 \quad \sigma_4^{-1} \quad \sigma_3^{-1}$

Présentation du groupe de tresses

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :
$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle \,.$$

$\rightsquigarrow A = \{$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2$

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

σ_i

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

$\sigma_i \;\leftrightarrow$

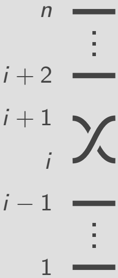
Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

$\sigma_i \;\leftrightarrow$



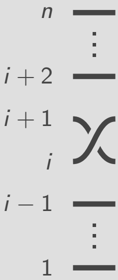
Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\}$.

$\sigma_i \;\leftrightarrow$



σ_i^{-1}

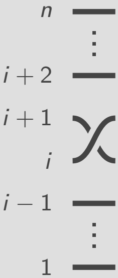
Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \mid R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

$\sigma_i \leftrightarrow$



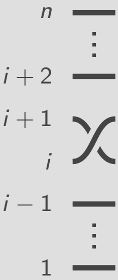
$\sigma_i^{-1} \leftrightarrow$

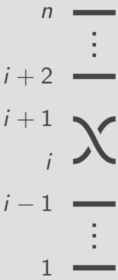
Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle\, A \,|\, R \,\rangle\,.$$

$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$.

$\sigma_i \;\leftrightarrow$ 

$\sigma_i^{-1} \;\leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

Relations des mots de tresses

Relations des mots de tresses

σ_1

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \quad \leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \quad \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  σ_1^{-1}

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\qquad \sigma_1^{-1} \quad \leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

σ_1

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1 \quad \leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1 \quad \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

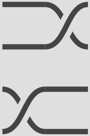
$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

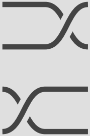
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

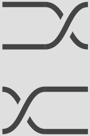
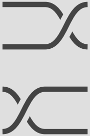
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

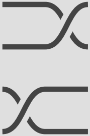
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

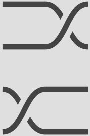
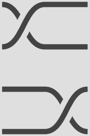
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

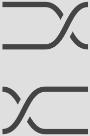
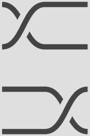
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

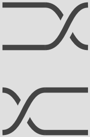
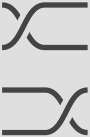
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

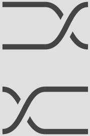
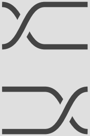
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

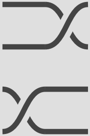
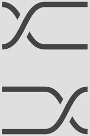
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\qquad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

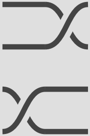
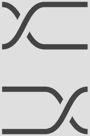
$\sigma_1 \, \sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3 \, \sigma_1$

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \, \sigma_j = \sigma_j \, \sigma_i$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\quad \sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

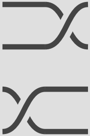
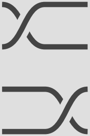
$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

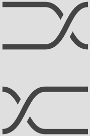
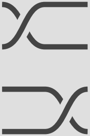
$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

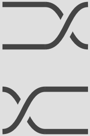
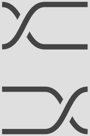
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

σ_1

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

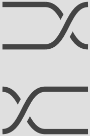
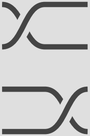
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

$\sigma_1 \qquad \leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

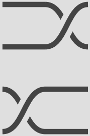
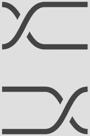
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

σ_1 $\leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

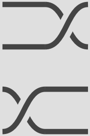
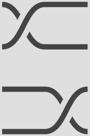
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2 \quad \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

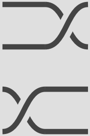
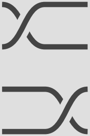
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2 \quad \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

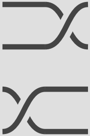
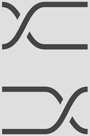
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1 \, \sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3 \, \sigma_1$

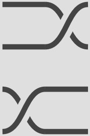
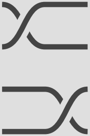
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \, \sigma_j = \sigma_j \, \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

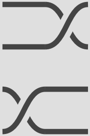
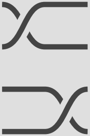
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\qquad \sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

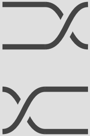
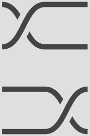
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

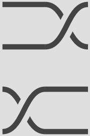
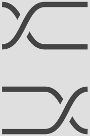
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1 \, \sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3 \, \sigma_1$

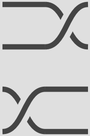
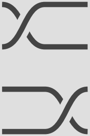
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \, \sigma_j = \sigma_j \, \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

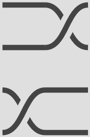
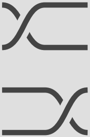
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\qquad \sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

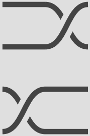
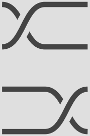
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i-j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_2$

Relations des mots de tresses

$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\approx$  $\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

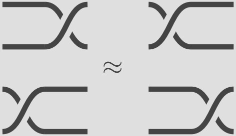
$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\approx$  $\leftrightarrow \sigma_2\,\sigma_1$

Relations des mots de tresses

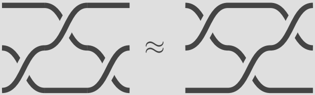
$\sigma_1\sigma_1^{-1} \leftrightarrow$ 

$\sigma_1^{-1}\sigma_1 \leftrightarrow$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1}\sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\,\sigma_3 \leftrightarrow$  $\leftrightarrow \sigma_3\,\sigma_1$

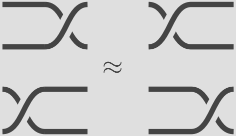
$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\,\sigma_j = \sigma_j\,\sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \leftrightarrow$  $\leftrightarrow \sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2$

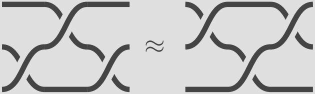
Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$  $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$ 

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$\sigma_1\, \sigma_3 \leftrightarrow$  $\leftrightarrow \sigma_3\, \sigma_1$

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\, \sigma_j = \sigma_j\, \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow$  $\leftrightarrow \sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_2$

$\rightsquigarrow$ Ajout des relations $\sigma_i\, \sigma_j\, \sigma_i = \sigma_j\, \sigma_i\, \sigma_j$ pour $|i - j| = 1$.

Présentation du groupe de tresses B_n

Présentation du groupe de tresses B_n

- Problème : Est-ce que toutes les relations sur les mots de tresses sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

Présentation du groupe de tresses B_n

- Problème : Est-ce que toutes les relations sur les mots de tresses sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

$\rightsquigarrow$ Emil Artin répond à cette question en

Présentation du groupe de tresses B_n

- Problème : Est-ce que toutes les relations sur les mots de tresses sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

$\rightsquigarrow$ Emil Artin répond à cette question en 1947.

Présentation du groupe de tresses B_n

- Problème : Est-ce que toutes les relations sur les mots de tresses sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

$\rightsquigarrow$ Emil Artin répond à cette question en 1947.

- Théorème :

Présentation du groupe de tresses B_n

- Problème : Est-ce que toutes les relations sur les mots de tresses sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

$\rightsquigarrow$ Emil Artin répond à cette question en 1947.

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

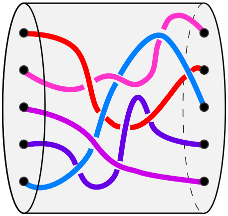
Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).

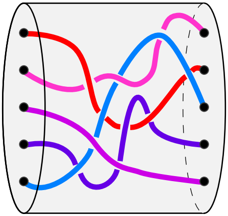
Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

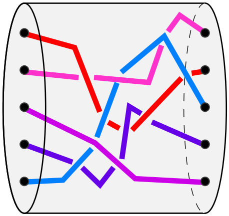
Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).



Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

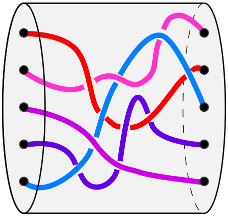
Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).

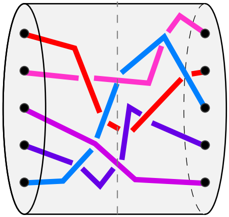




Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

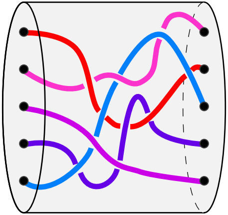
Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).

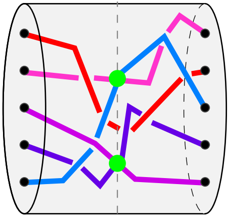




Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

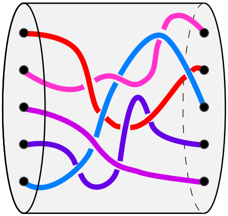
Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).

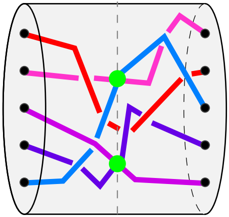




Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).

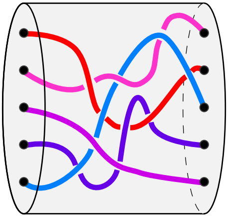


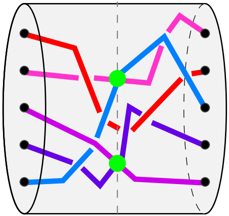


On utilisera les notations suivantes :

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).



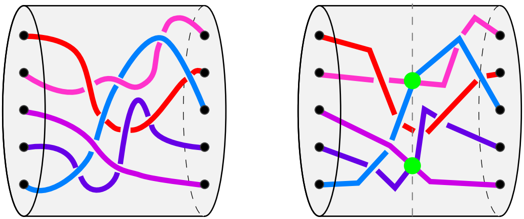


On utilisera les notations suivantes :

- $\mathcal{GB}_n$: ensemble des tresses géomètriques à n-brins ;

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).

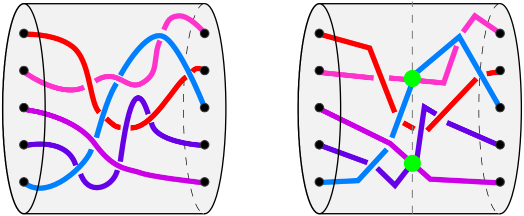


On utilisera les notations suivantes :

- $\mathcal{GB}_n$: ensemble des tresses géomètriques à n-brins ;
- $\mathcal{GB}_n^{\mathsf{aff}}$: ensemble des tresses affines à n-brins ;

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse affine est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite régulière si son projeté est régulier
(au plus un croisement par colonne).



On utilisera les notations suivantes :

– $\mathcal{GB}_n$: ensemble des tresses géomètriques à n-brins ;
– $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$: ensemble des tresses affines à n-brins ;
– $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$: ensemble des tresses affines régulières à n-brins.

De ce qui précède, on obtient (presque) :

Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à
  une tresse affine régulière.

Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

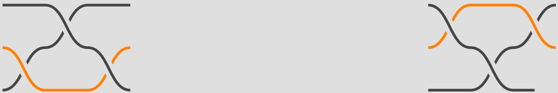
De ce qui précède, on obtient (presque) :

- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.

Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

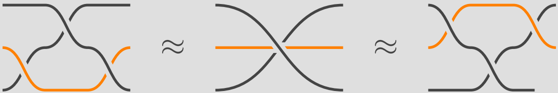
- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

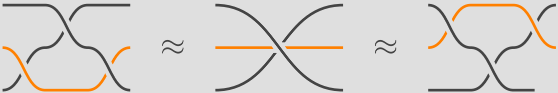
- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.

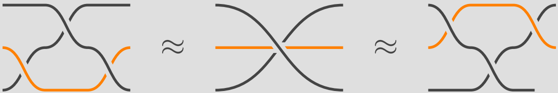


- Proposition : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\mathrm{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s\in[0,1]}$ dans

Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.

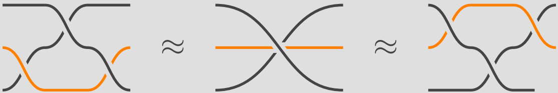


- Proposition : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$ vérifiant :

Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à
  une tresse affine régulière.

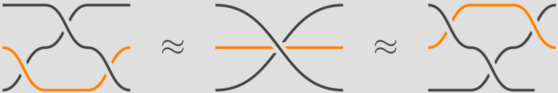


- Proposition : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$ vérifiant :
  - $\beta = \beta(0)$ et $\beta' = \beta(1)$;

Démonsration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- Proposition : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



- Proposition : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$ vérifiant :
  - $\beta = \beta(0)$ et $\beta' = \beta(1)$;
  - $\beta(s) \in \mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sauf pour $s = s_i$ avec $0 < s_1 < ... < s_m < 1$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i\,\sigma_j & = & \sigma_j\,\sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\,\sigma_j\,\sigma_i & = & \sigma_j\,\sigma_i\,\sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de $\mathcal{BW}_n$, on pose

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de $\mathcal{BW}_n$, on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j &=& \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &=& \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \qquad (1)$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de $\mathcal{BW}_n$, on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{lcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \qquad (1)$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de $\mathcal{BW}_n$, on pose
- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

- Reformulation : Pour tout $w, w' \in \mathcal{BW}_n$ on a $w \equiv w'$ ssi $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i\,\sigma_j &=& \sigma_j\,\sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\,\sigma_j\,\sigma_i &=& \sigma_j\,\sigma_i\,\sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de $\mathcal{BW}_n$, on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

- Reformulation : Pour tout $w, w' \in \mathcal{BW}_n$ on a $w \equiv w'$ ssi $w \sim w'$.

On a déjà que $w \equiv w'$ implique $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \tag{1}$$

Soit $\mathcal{BW}_n$ l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de $\mathcal{BW}_n$, on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

- **Reformulation** : Pour tout $w, w' \in \mathcal{BW}_n$ on a $w \equiv w'$ ssi $w \sim w'$.

On a déjà que $w \equiv w'$ implique $w \sim w'$. Il reste à montrer la réciproque.

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

$\beta(w)$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

$\beta(w)$ $\beta(w')$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\mathrm{aff}}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\mathrm{aff}}$,

– $\omega_k : s \mapsto \mathrm{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

– il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,

– $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

– comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.

– il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\mathrm{aff}}$,

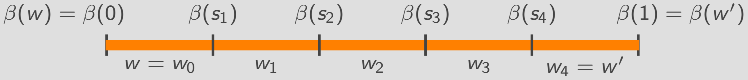
– $\omega_k : s \mapsto \mathrm{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

– comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

– il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.



– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,

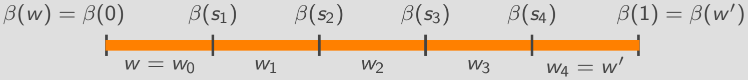
– $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

– comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

– il existe une suite $(w_k)_{k\in[0,m-1]}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.



– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\mathrm{aff}}$,

– $\omega_k : s \mapsto \mathrm{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

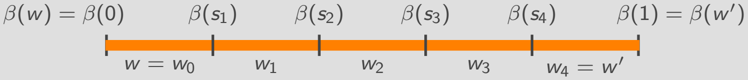
– comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

– il existe une suite $(w_k)_{k\in[0,m-1]}$,

– par construction $w_k \sim w'_k$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.



– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\mathrm{aff}}$,

– $\omega_k : s \mapsto \mathrm{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

– comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

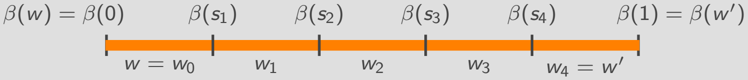
– il existe une suite $(w_k)_{k\in[0,m-1]}$,

– par construction $w_k \sim w'_k$,

– il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

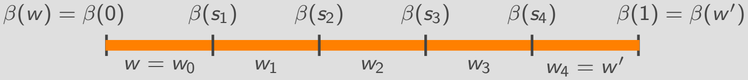
Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,
- comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k\in[0,m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,
- il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k,
- $\beta(s_k)$ est affine mais pas régulière,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.



– il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,

– $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,

– comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

– il existe une suite $(w_k)_{k\in[0,m-1]}$,

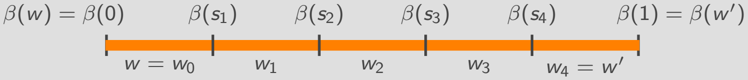
– par construction $w_k \sim w'_k$,

– il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k,

– $\beta(s_k)$ est affine mais pas régulière,
$\rightsquigarrow$ au moins deux croisements de $\beta(s_k)$ sont sur le même colonne,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans $\mathcal{BW}_n$ tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s\in[0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans $\mathcal{BW}_n$,
- comme $\mathcal{BW}_n$ est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k\in[0,m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,
- il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k,
- $\beta(s_k)$ est affine mais pas régulière,
  $\rightsquigarrow$ au moins deux croisements de $\beta(s_k)$ sont sur le même colonne,
  $\rightsquigarrow$ quitte à affiner $(\beta_s)_s$ on peut supposer qu'il y en a deux.

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

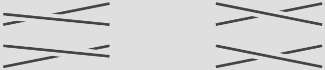
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

$\beta(s_k)$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$\beta(s_k)$

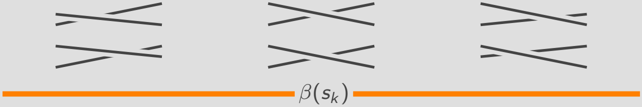
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

$\beta(s_k)$

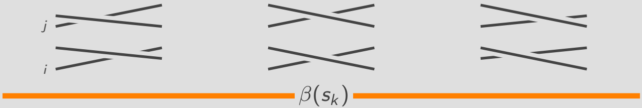
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



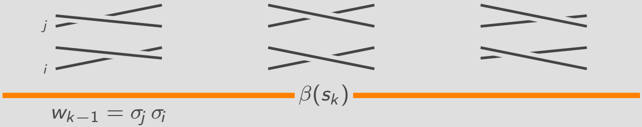
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



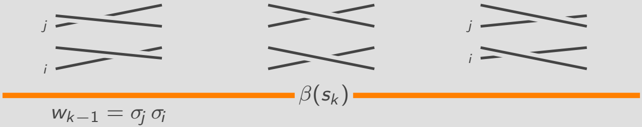
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



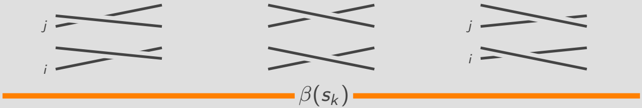
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

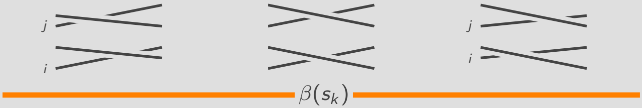
- Cas de deux points doubles



$w_{k-1} = \sigma_j\, \sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\, \sigma_j$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

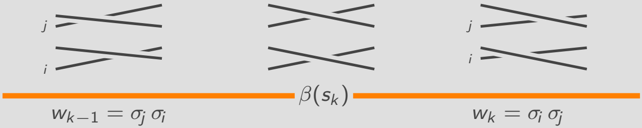


$w_{k-1} = \sigma_j\,\sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\,\sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

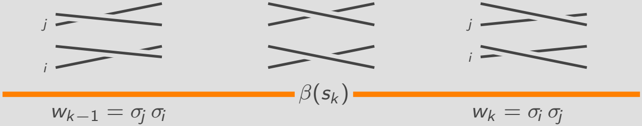
- Cas de deux points doubles



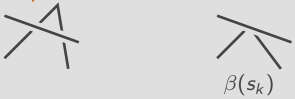
- Cas d'un point triple à deux brins

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

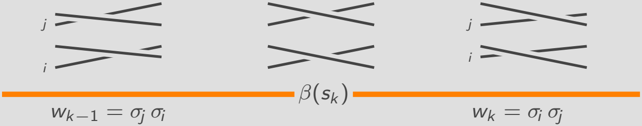


- Cas d'un point triple à deux brins

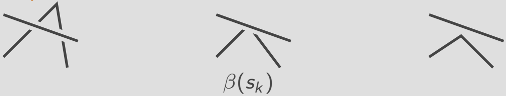


Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

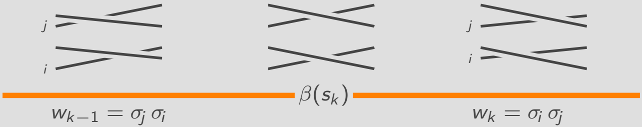


- Cas d'un point triple à deux brins

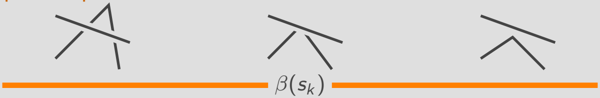


Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

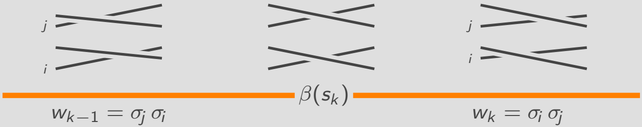


- Cas d'un point triple à deux brins

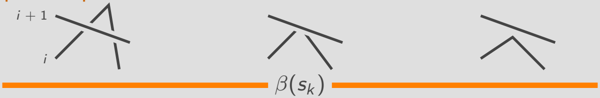


Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

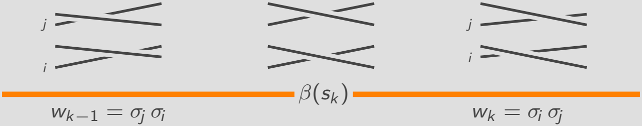


- Cas d'un point triple à deux brins

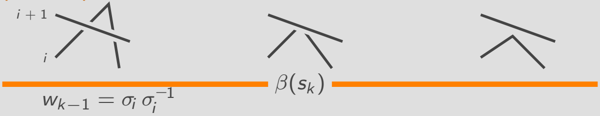


Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

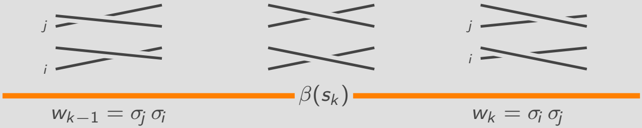


- Cas d'un point triple à deux brins

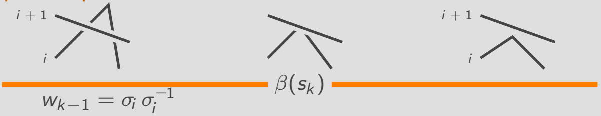


Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

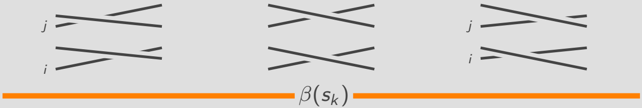


- Cas d'un point triple à deux brins



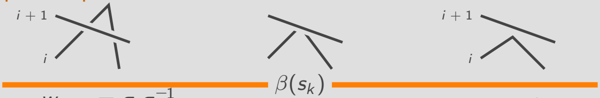
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$w_{k-1} = \sigma_j\,\sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\,\sigma_j$

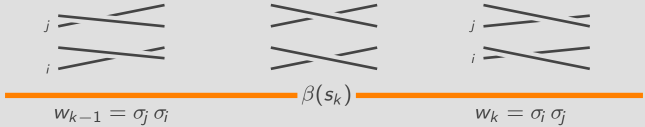
- Cas d'un point triple à deux brins



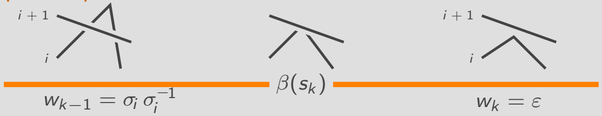
$w_{k-1} = \sigma_i\,\sigma_i^{-1}$ $\qquad$ $w_k = \varepsilon$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



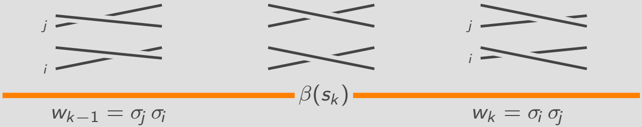
- Cas d'un point triple à deux brins



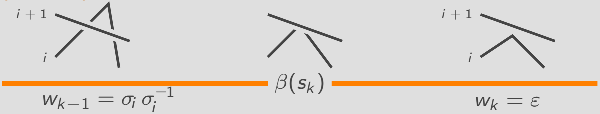
- Cas d'un point triple à trois brins

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

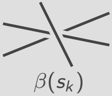
- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

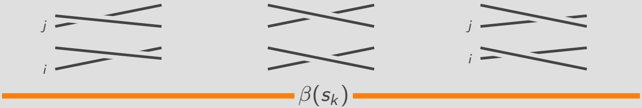


- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

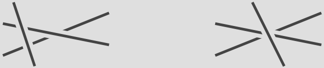


$w_{k-1} = \sigma_j \, \sigma_i$ $\quad$ $w_k = \sigma_i \, \sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins

$w_{k-1} = \sigma_i \, \sigma_i^{-1}$ $\quad$ $w_k = \varepsilon$

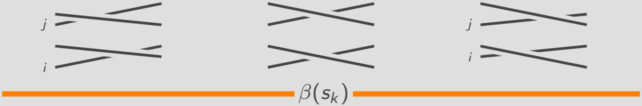
- Cas d'un point triple à trois brins



$\beta(s_k)$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

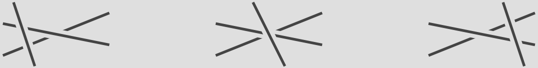


$w_{k-1} = \sigma_j \, \sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i \, \sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins

$w_{k-1} = \sigma_i \, \sigma_i^{-1}$ $\qquad$ $w_k = \varepsilon$

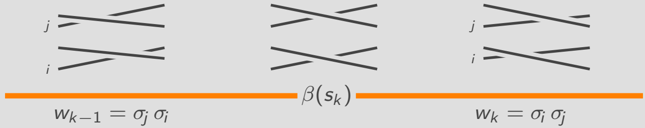
- Cas d'un point triple à trois brins



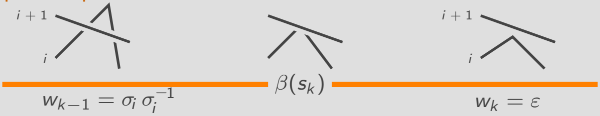
$\beta(s_k)$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

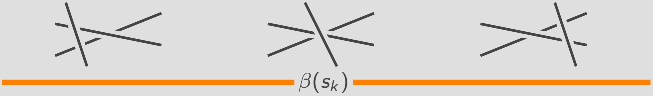
- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

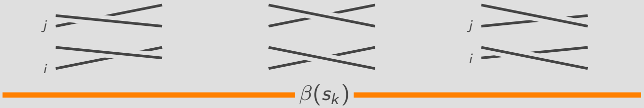


- Cas d'un point triple à trois brins



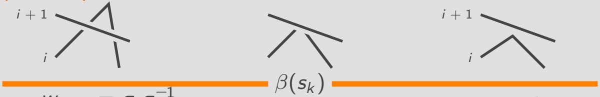
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



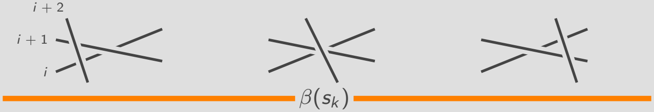
$w_{k-1} = \sigma_j\,\sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\,\sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins



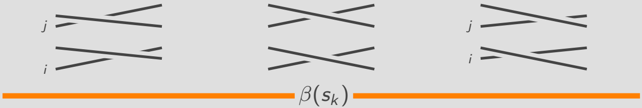
$w_{k-1} = \sigma_i\,\sigma_i^{-1}$ $\qquad$ $w_k = \varepsilon$

- Cas d'un point triple à trois brins



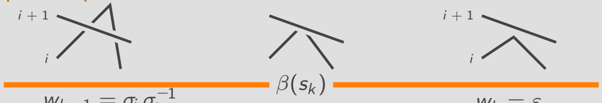
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



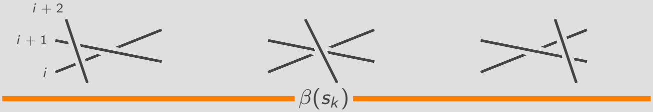
$w_{k-1} = \sigma_j\,\sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\,\sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins



$w_{k-1} = \sigma_i\,\sigma_i^{-1}$ $\qquad$ $w_k = \varepsilon$

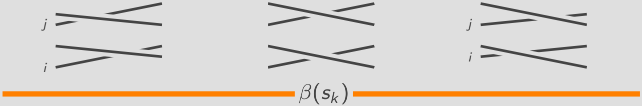
- Cas d'un point triple à trois brins



$w_{k-1} = \sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}$

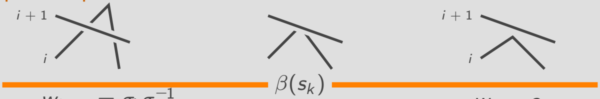
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



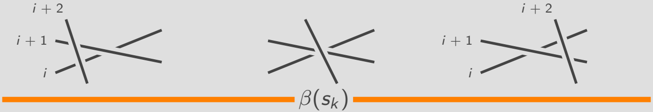
$w_{k-1} = \sigma_j \, \sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i \, \sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins



$w_{k-1} = \sigma_i \, \sigma_i^{-1}$ $\qquad$ $w_k = \varepsilon$

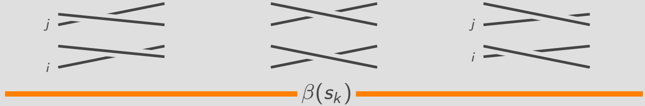
- Cas d'un point triple à trois brins



$w_{k-1} = \sigma_{i+1} \, \sigma_i \, \sigma_{i+1}$

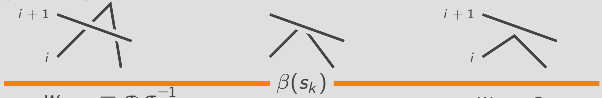
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



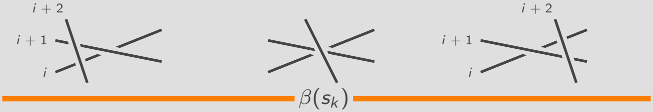
$w_{k-1} = \sigma_j\, \sigma_i$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\, \sigma_j$

- Cas d'un point triple à deux brins



$w_{k-1} = \sigma_i\, \sigma_i^{-1}$ $\qquad$ $w_k = \varepsilon$

- Cas d'un point triple à trois brins



$w_{k-1} = \sigma_{i+1}\, \sigma_i\, \sigma_{i+1}$ $\qquad$ $w_k = \sigma_i\, \sigma_{i+1}\, \sigma_i$

Problème du mot

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

Problème du mot

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- Solution au problème d'isotopie.

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Problème du mot

• Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

• Solution au problème d'isotopie.
Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.
Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β'.

Problème du mot

• Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

• Solution au problème d'isotopie.
Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.
Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β'.
On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

Problème du mot

- Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- Solution au problème d'isotopie.

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.
Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β'.
On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

- Problème du mot :

Problème du mot

• Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

• Solution au problème d'isotopie.
Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.
Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β'.
On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

• Problème du mot : Quelque soit w et w', déterminer si on a $w \equiv w'$.

Problème du mot

• Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

• Solution au problème d'isotopie.
Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.
Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β'.
On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

• Problème du mot : Quelque soit w et w', déterminer si on a $w \equiv w'$.

$\rightsquigarrow$ Ce problème est

Problème du mot

• Théorème : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rcll} \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i & = & \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

• Solution au problème d'isotopie.
Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.
Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β'.
On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

• Problème du mot : Quelque soit w et w', déterminer si on a $w \equiv w'$.

$\rightsquigarrow$ Ce problème est indécidable en général (Novikov 1952).

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

- Question : Le problème du mot est-il décidable pour $A_{S,M}$?

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

- Question : Le problème du mot est-il décidable pour $A_{S,M}$?

$\rightsquigarrow$ pas de réponse en général.

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \left\langle S \mid \underbrace{sts\cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{t,s}} \right\rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S\times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

- Question : Le problème du mot est-il décidable pour $A_{S,M}$?

$\rightsquigarrow$ pas de réponse en général.

- Exemple :

$$\left\langle a, b, c, d \;\middle|\; \begin{array}{ccc} aba = bab, & aca = cac, & ada = dad \\ bcb = cbc, & bdb = dbd, & cd = dc \end{array} \right\rangle$$