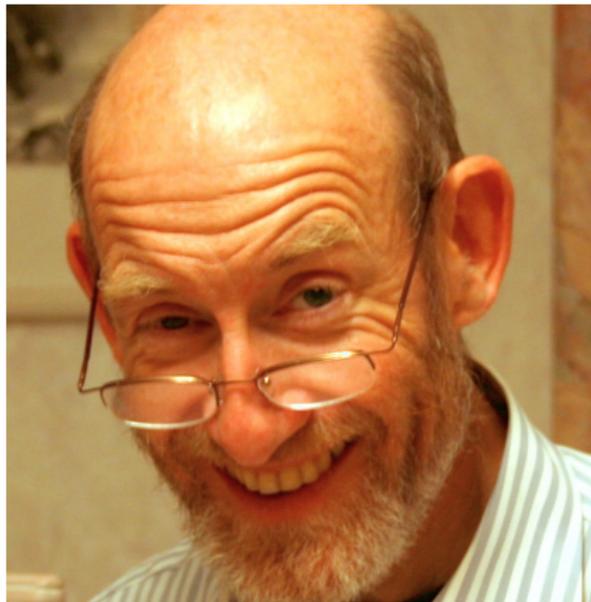


Calcul des tresses

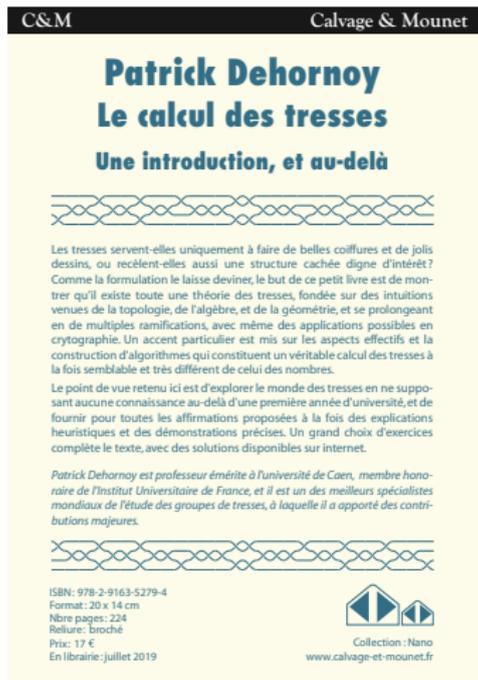
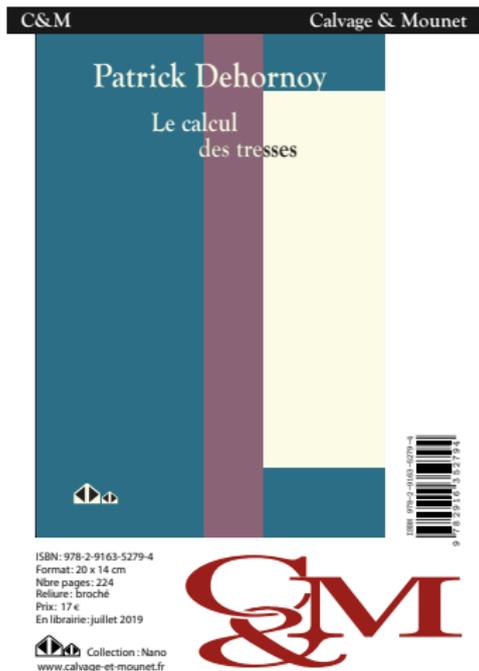
Jean Fromentin

Laboratoire LMPA
Université du Littoral, Calais

Patrick Dehornoy



Patrick Dehornoy – Le calcul des tresses

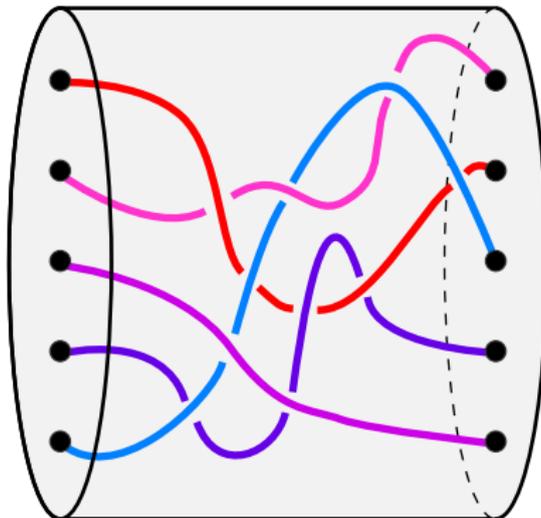


Tresse géométrique

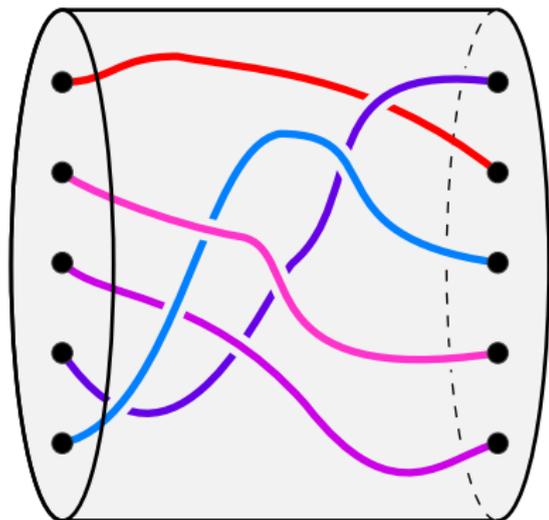
Une tresse géométrique (ou photo de tresse) est :

Tresse géométrique

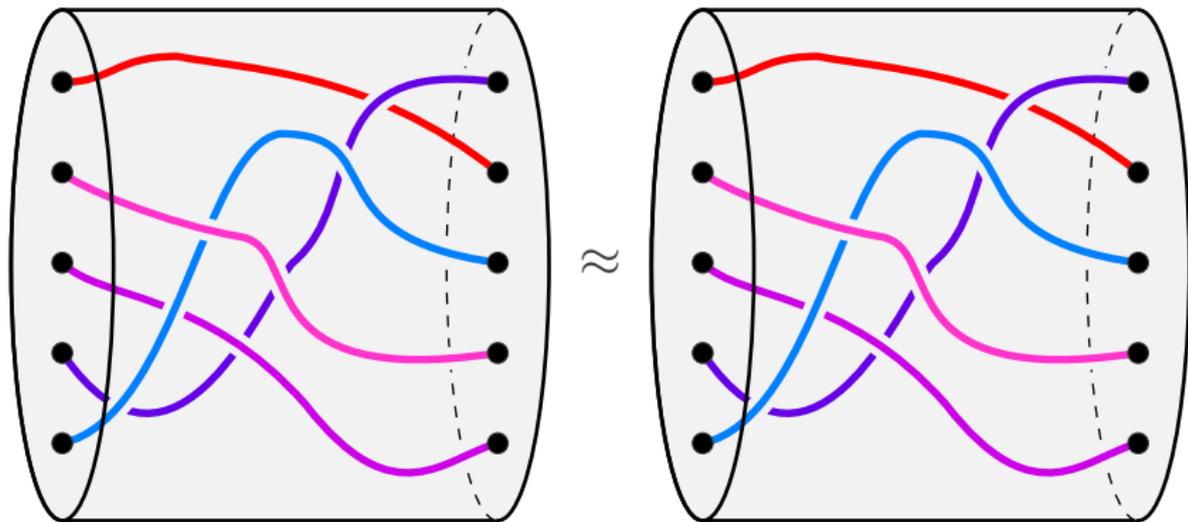
Une tresse géométrique (ou photo de tresse) est :



Déformation



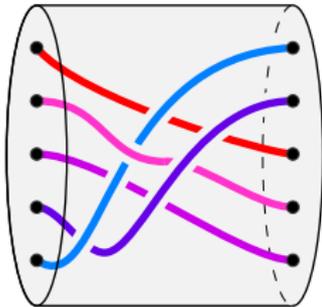
Déformation



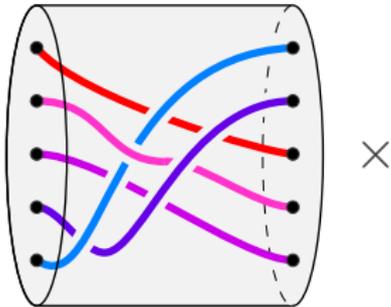
Déformation

Multiplication

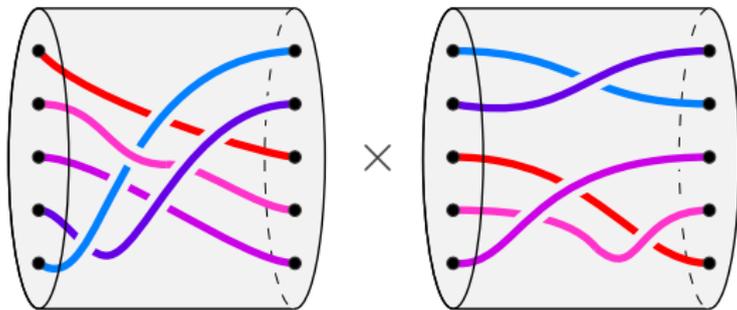
Multiplication



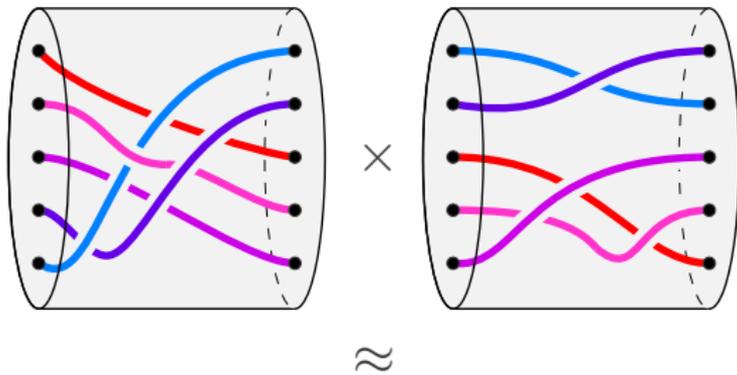
Multiplication



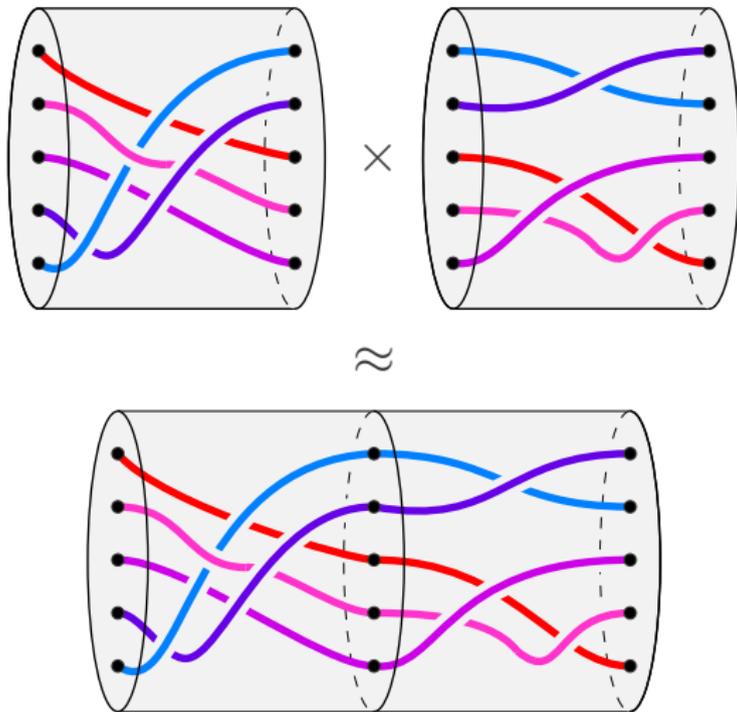
Multiplication



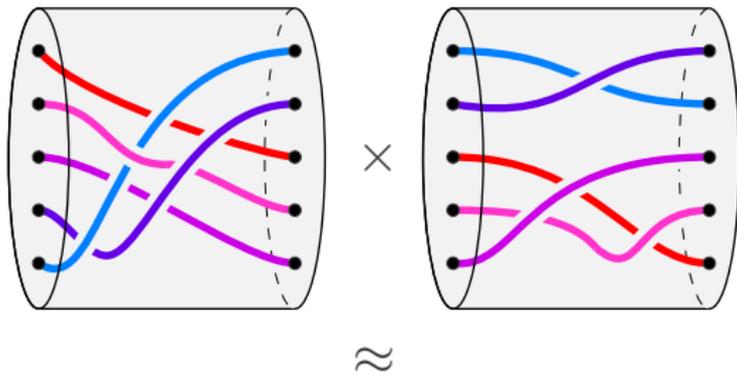
Multiplication



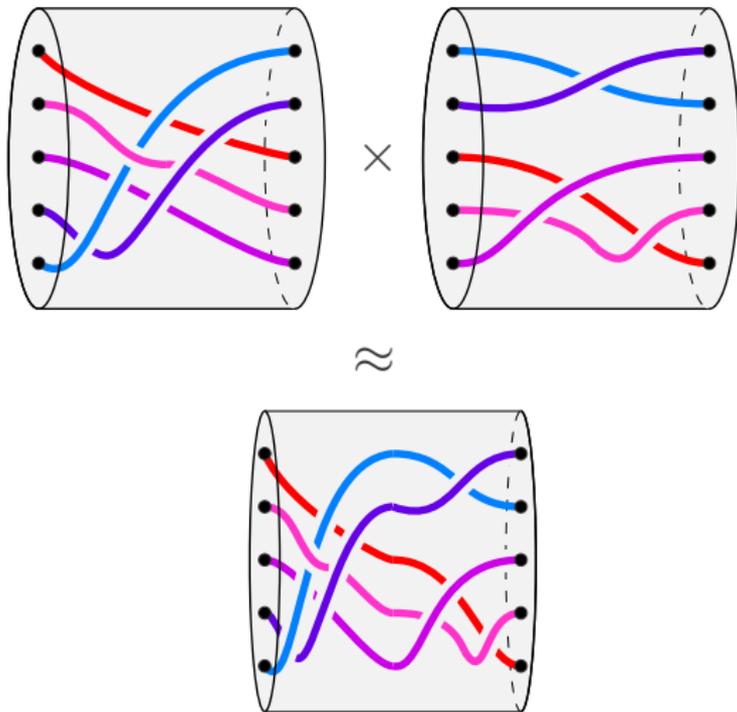
Multiplication



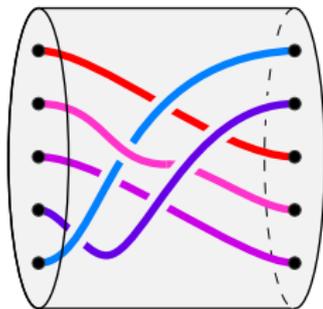
Multiplication



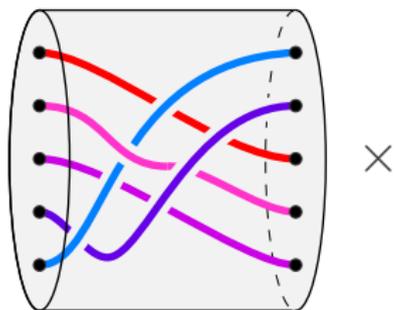
Multiplication



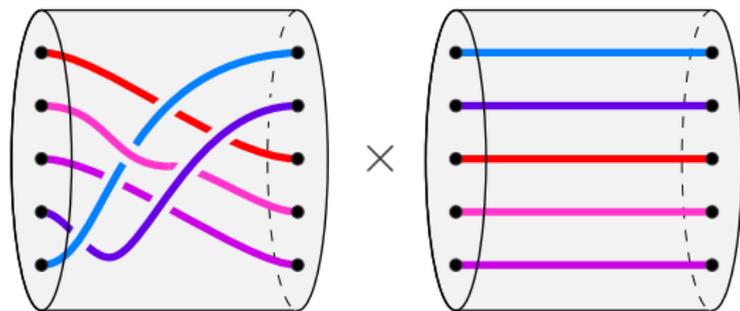
Neutre



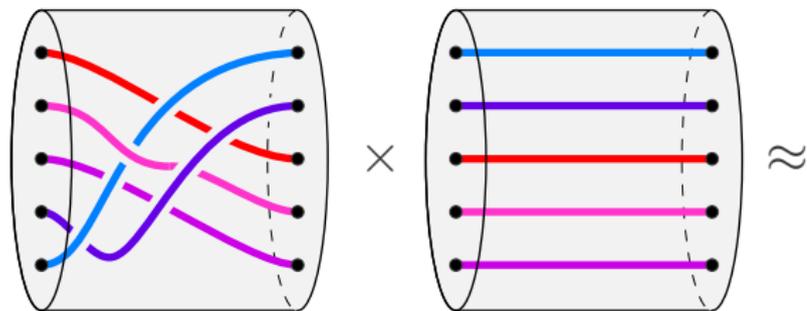
Neutre



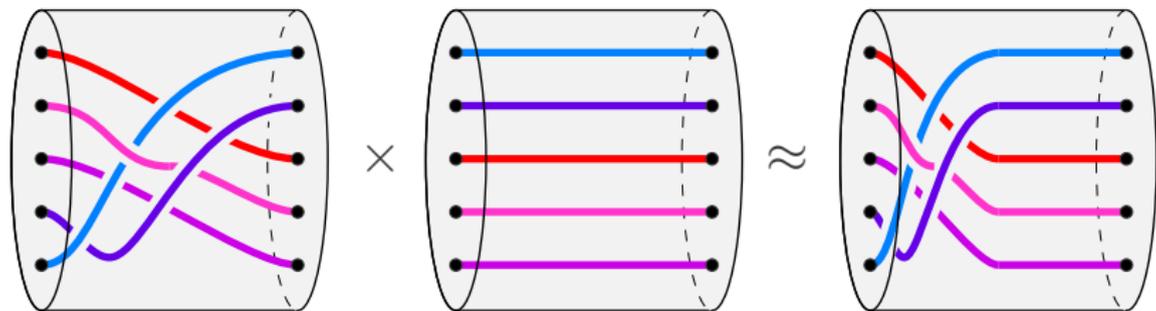
Neutre



Neutre

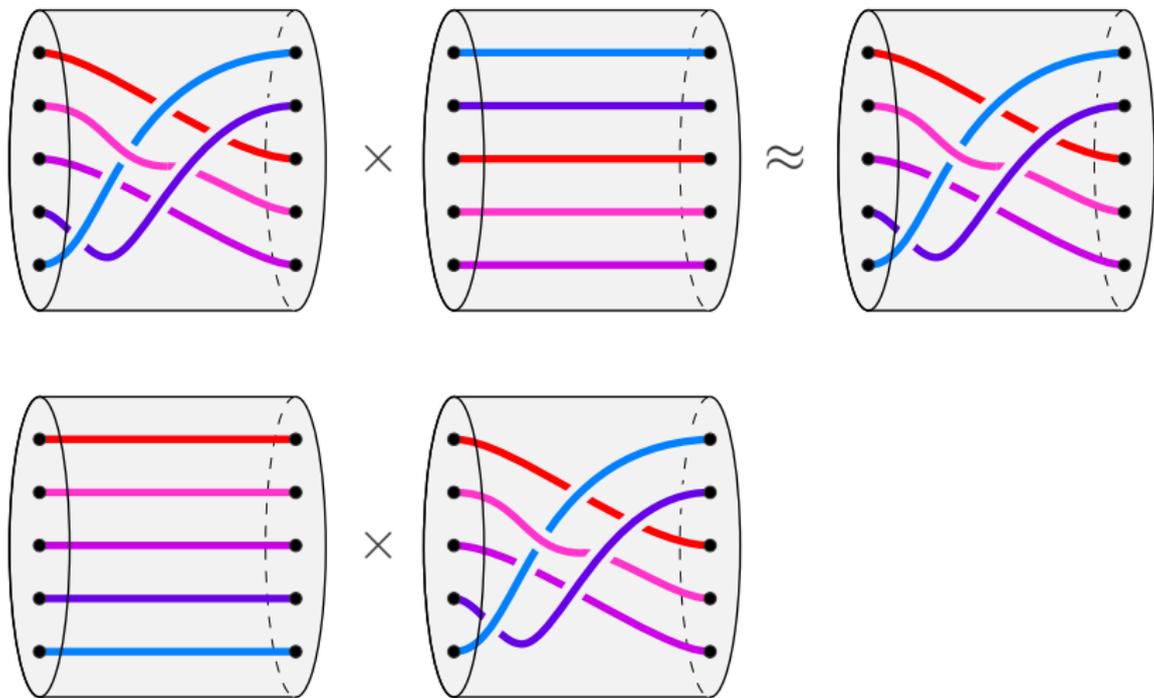


Neutre

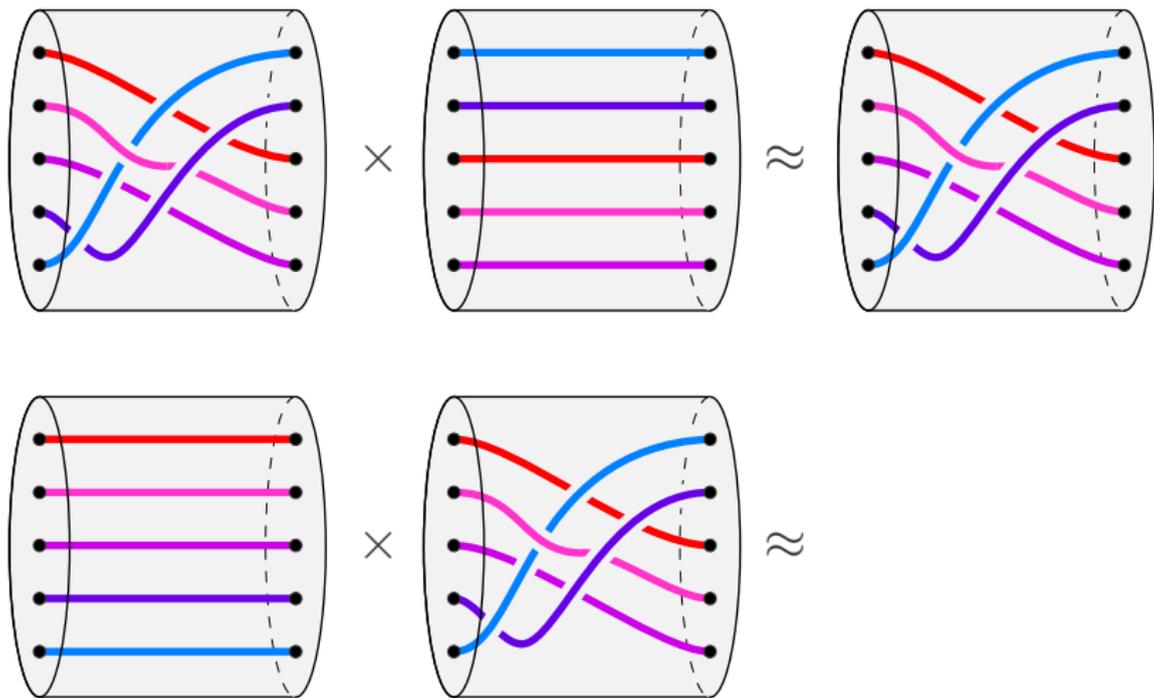


Neutre

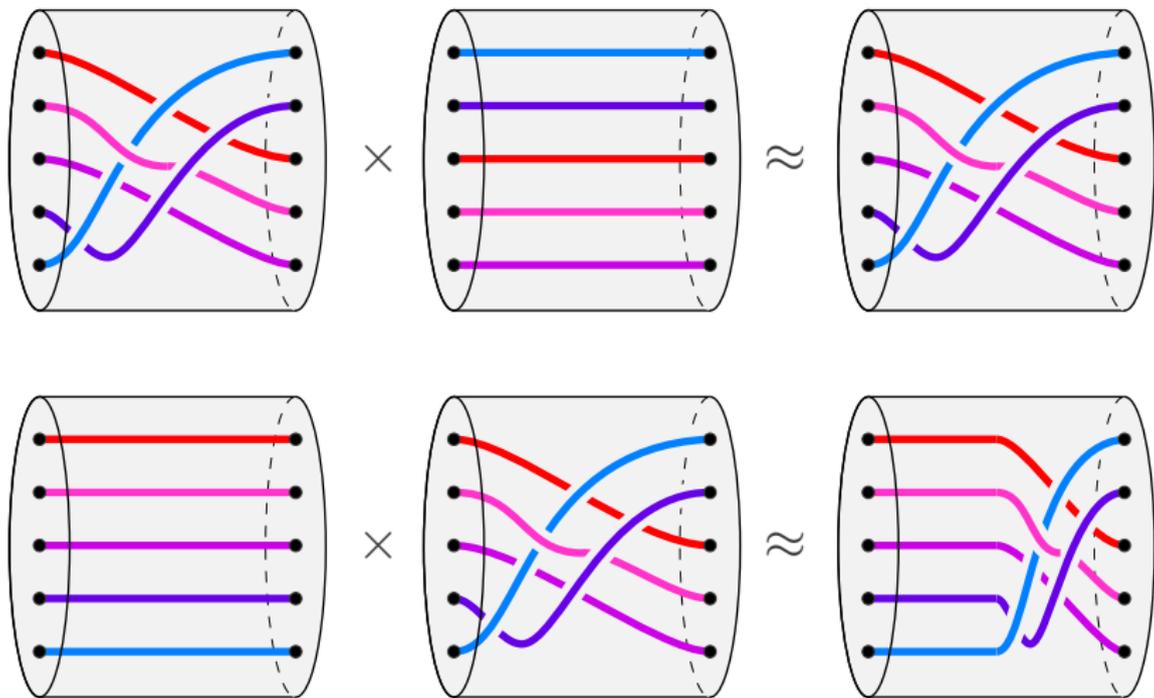
Neutre



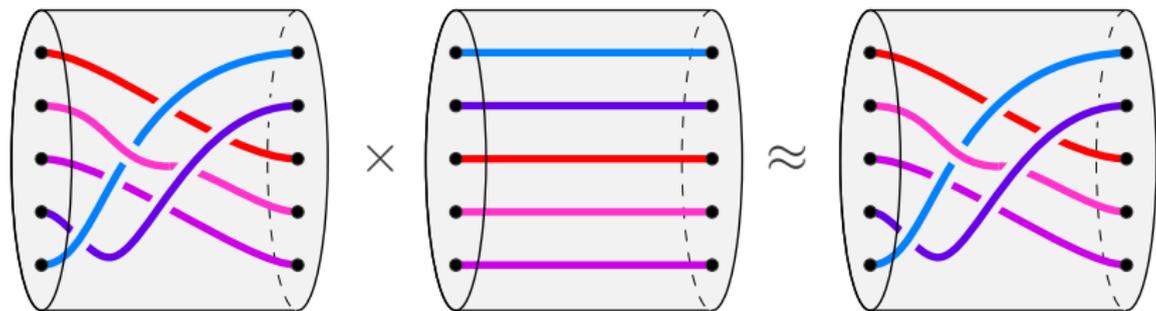
Neutre



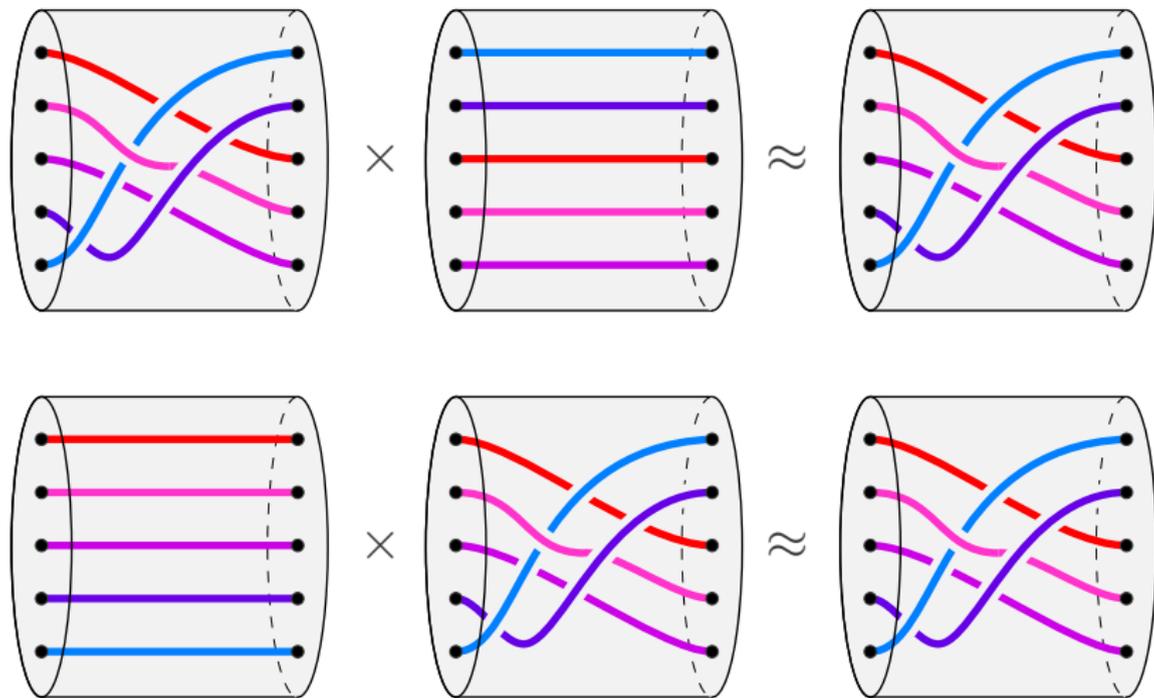
Neutre



Neutre

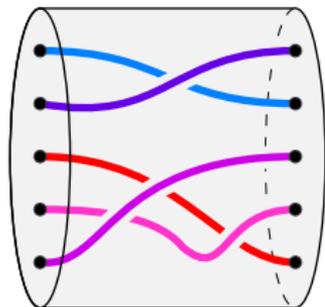


Neutre

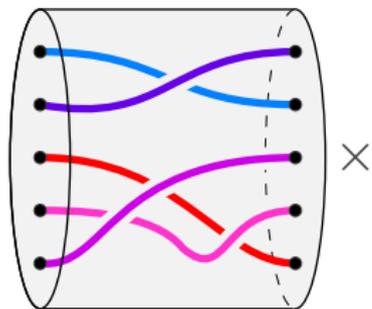


\rightsquigarrow La tresse **triviale** est notée 1.

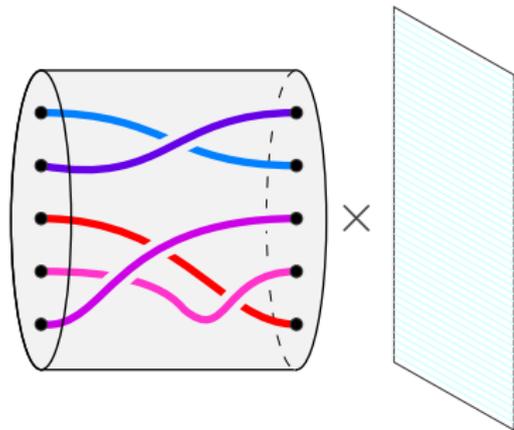
Inverse



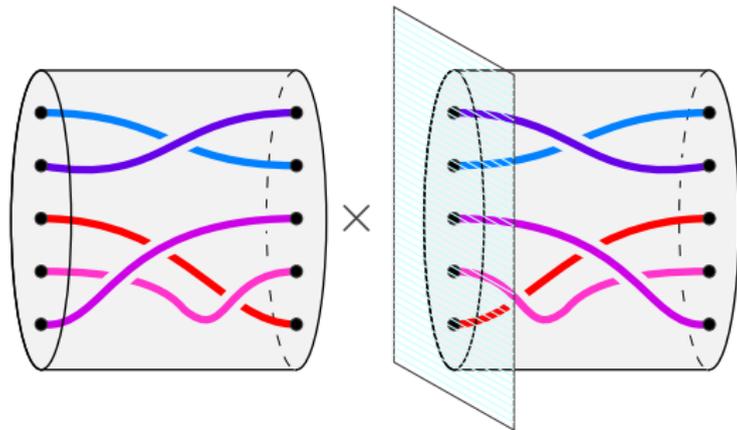
Inverse



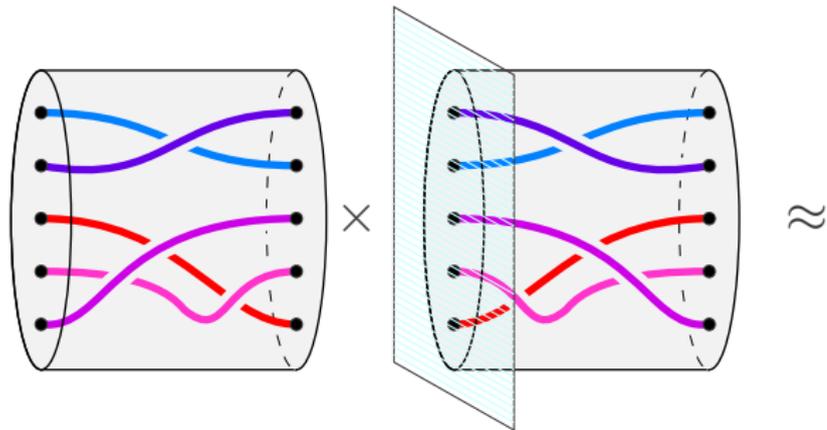
Inverse



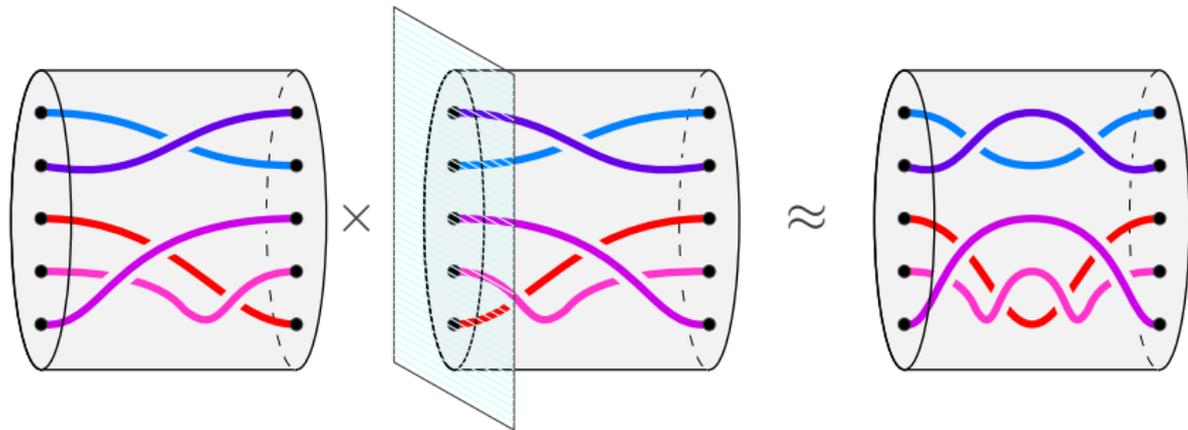
Inverse



Inverse



Inverse



Inverse

Groupe de tresses

Groupe de tresses

- Definition :

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** :

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.
- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.
- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale**

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.
- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.
- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

\rightsquigarrow C'est le groupe de tresses à n brins.

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

\rightsquigarrow C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

\rightsquigarrow C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin**

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

\rightsquigarrow C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin** en 1925.

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

↪ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin** en **1925**.

↪ Ils semblaient déjà connus par

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

↪ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin** en 1925.

↪ Ils semblaient déjà connus par **Adolph Hurwitz**

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

↪ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin** en 1925.

↪ Ils semblaient déjà connus par **Adolph Hurwitz** en 1891.

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

↪ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin** en 1925.

↪ Ils semblaient déjà connus par **Adolph Hurwitz** en 1891.

- **Problème** : Comment décider si une tresse quelconque est triviale ?

Groupe de tresses

- **Definition** : On note B_n l'ensemble des tresses à n brins.

- **Proposition** : L'ensemble B_n muni de la multiplication de tresses \times et de la tresse **triviale** est un (groupe).

↪ C'est le groupe de tresses à n brins.

- Ils sont introduits explicitement par **Emil Artin** en 1925.

↪ Ils semblaient déjà connus par **Adolph Hurwitz** en 1891.

- **Problème** : Comment décider si une tresse quelconque est triviale ?

↪ De manière générale, comment **calculer** avec les tresses ?

Présentation de monoïde – Mots

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

\rightsquigarrow A est appelé **alphabet**

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

\rightsquigarrow A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

- Exemple :

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un **A -mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note **A^*** l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un **A -mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note **A^*** l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un **A -mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note **A^*** l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un **A -mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note **A^*** l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,
 - $v = \textit{Bonjour}$

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,
 - $v = \textit{Bonjour}$ n'appartient pas à A^* .

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,
 - $v = \textit{Bonjour}$ n'appartient pas à A^* .

La **longueur** d'un A -mot est son nombre de lettres.

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,
 - $v = \textit{Bonjour}$ n'appartient pas à A^* .

La **longueur** d'un A -mot est son nombre de lettres.

- **Exemple** :

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,
 - $v = \textit{Bonjour}$ n'appartient pas à A^* .

La **longueur** d'un A -mot est son nombre de lettres.

- **Exemple** : La longueur du mot $u = \textit{bonjour}$ est

Présentation de monoïde – Mots

Un **mot** est une suite finie **w** d'éléments pris dans un ensemble A .
On dit que w est un A -**mot**.

↪ A est appelé **alphabet** et ses éléments **lettres**.

↪ on note A^* l'ensemble des A -mots.

- **Exemple** : Considérons l'alphabet $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
 - $u = \textit{bonjour}$ appartient à A^* ,
 - $v = \textit{Bonjour}$ n'appartient pas à A^* .

La **longueur** d'un A -mot est son nombre de lettres.

- **Exemple** : La longueur du mot $u = \textit{bonjour}$ est 7.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition :**

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** :

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$ et $w = ca$.

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.
 $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

- **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

- **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.
 $(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ abc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w)$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca)$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababc ca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babc ca$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babc ca = abababcca$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babc ca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babc ca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ abc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (abc \circ ca) = aba \circ abcaca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ abc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (abc \circ ca) = aba \circ abccca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba \text{ et } \varepsilon \circ u$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = babc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ babc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (babc \circ ca) = aba \circ babc ca = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba \text{ et } \varepsilon \circ u = \varepsilon \circ aba$$

Présentation de monoïde – Monoïde libre

Soit A un alphabet.

On définit une loi \circ sur A^* par $u \circ v = uv$ la **concaténation** de mots.
On note par ε l'unique mot de longueur 0.

• **Proposition** : $(A^*, \circ, \varepsilon)$ est un **monoïde**.

• **Exemple** : $A = \{a, b, c\}$, $u = aba$, $v = abc$ et $w = ca$.

$$(u \circ v) \circ w = (aba \circ abc) \circ ca = abababc \circ ca = abababcca$$

$$u \circ (v \circ w) = aba \circ (abc \circ ca) = aba \circ abcac = abababcca$$

$$u \circ \varepsilon = aba \circ \varepsilon = aba \text{ et } \varepsilon \circ u = \varepsilon \circ aba = aba.$$

Relation

Soit A un alphabet.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v)

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents**

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si
 $w =$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et}$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' =$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- **Exemple** :

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
 - on a $abaa$ $abaaa$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
 - on a $ababaa$ $abaaaa$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

- **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

- **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.
 - on a $ababaa \equiv^+ abaaaa$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

• **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

• **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

– on a $ababaa \equiv^+ abaaaa$,

– on a $abba \equiv^+ abab$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

• **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

• **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

– on a $ababaa \equiv^+ abaaaa$,

– on a $abba \equiv^+ abab$,

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

• **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

• **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

– on a $ababaa \equiv^+ abaaaa$,

– on a $abba \equiv^+ abab$,

– on a $aaa \equiv^+ aba$.

Relation

Soit A un alphabet.

Une **relation** de mots est un couple (u, v) de A -mots. On la note $u = v$.

• **Exemple** : Pour $A = \{a, b\}$, $ab = ba$ est une relation de mots.

On dit que deux mots w et w' sont **équivalents** pour une relation $u = v$ si

$$w = w_1 \circ u \circ w_2 \quad \text{et} \quad w' = w_1 \circ v \circ w_2,$$

ou réciproquement. On note alors $w \equiv^+ w'$.

• **Exemple** : On pose $A = \{a, b\}$ et on considère la relation $ab = ba$.

– on a $abaa \equiv^+ abaaa$,

– on a $abba \equiv^+ abab$,

– on a $aaa \not\equiv^+ aba$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- Exemple :

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- Exemple : Prenons $M = \langle \mid \rangle^+$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- Exemple : Prenons $M = \langle a \mid \quad \quad \quad \rangle^+$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.
 - On a $A = \{a\}$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.
 - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

– On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon\}$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.
 - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a\}$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

- **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.
 - On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

– On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

– On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa\}$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

– On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa\}$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

– On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \color{red}aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa$

Présentation de monoïde

Soit A un alphabet.

Pour tout ensemble R de relations de A -mots, on définit

$$M = \langle A \mid R \rangle^+$$

comme le monoïde obtenu de $(A^*, \circ, \varepsilon)$ en identifiant les mots équivalents vis à vis des relations de R .

• **Exemple** : Prenons $M = \langle a \mid aaa = \varepsilon \rangle^+$.

- On a $A = \{a\}$ et donc $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$.
- Les éléments distincts de M sont $\{\varepsilon, a, aa\}$.

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- Exemple :

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors :

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a =$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 =$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k \mapsto k$.

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k \mapsto k$.

Finalement

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k \mapsto k$.

Finalement

$$\mathbb{N} \simeq \langle$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k \mapsto k$.

Finalement

$$\mathbb{N} \simeq \langle a \rangle$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k \mapsto k$.

Finalement

$$\mathbb{N} \simeq \langle a \mid$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{N}

- **Exemple** : $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{N}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors : $0 \mapsto \varepsilon$ et $1 \mapsto a$.

Donc $a \circ a = aa \mapsto 1 + 1 = 2$ puis $\underbrace{a \circ \dots \circ a}_k \mapsto k$.

Finalement

$$\mathbb{N} \simeq \langle a \mid \emptyset \rangle^+.$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple :

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ?

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 =$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1)$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et 0

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- **Exemple** : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

\rightsquigarrow on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

\rightsquigarrow on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Finalement

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

\rightsquigarrow on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Finalement

$$\mathbb{Z} \simeq \langle$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

\rightsquigarrow on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Finalement

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \rangle$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

\rightsquigarrow on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Finalement

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid$$

Présentation de monoïdes - \mathbb{Z}

- Exemple : $(\mathbb{Z}, +, 0)$ est un monoïde.

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \simeq \langle A \mid R \rangle^+.$$

On a alors $i \mapsto a^i = a \dots a$ de longueur i .

Quelle est l'image de -1 ? $-1 \mapsto b$ et donc $-i \mapsto b^i$.

On a alors $0 = 1 + (-1) \mapsto ab$ et $0 = (-1) + 1 \mapsto ba$.

\rightsquigarrow on ajoute les relations $ab = \varepsilon$ et $ba = \varepsilon$.

Finalement

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid ab = \varepsilon, ba = \varepsilon \rangle^+.$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^{\pm} -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) =$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^{\pm} -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^{\pm} -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\}$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^{\pm} -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^{\pm} -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^{\pm} -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^{\pm} -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

- **Exemple** : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

- **Exemple** : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid ab = \varepsilon, ba = \varepsilon \rangle^+$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^{\pm} -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^{\pm} -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

- **Exemple** : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid ab = \varepsilon, ba = \varepsilon \rangle^+ = \langle a \mid \rangle.$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

- **Exemple** : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid ab = \varepsilon, ba = \varepsilon \rangle^+ = \langle a \mid \rangle.$$

Groupes libres d'ordre $n \geq 1$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

• **Exemple** : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid ab = \varepsilon, ba = \varepsilon \rangle^+ = \langle a \mid \rangle.$$

Groupes libres d'ordre $n \geq 1$

$$F_n = \langle a_1, \dots, a_n \mid \rangle$$

Présentation de groupe

Soit A un alphabet.

On note A^{-1} l'ensemble des inverses formels des éléments de A .
Un A^\pm -mot est un mot sur l'alphabet $A \cup A^{-1}$.

Pour tout ensemble R de relations de A^\pm -mots, on définit

$$\langle A \mid R \rangle = \langle A \cup A^{-1} \mid R \cup R_G(A) \rangle^+,$$

où $R_G(A) = \{aa^{-1} = \varepsilon, a \in A\} \cup \{a^{-1}a = \varepsilon, a \in A\}$.

• **Exemple** : Revenons à $(\mathbb{Z}, +)$

$$\mathbb{Z} \simeq \langle a, b \mid ab = \varepsilon, ba = \varepsilon \rangle^+ = \langle a \mid \rangle.$$

Groupes libres d'ordre $n \geq 1$

$$F_n = \langle a_1, \dots, a_n \mid \rangle$$

On observe $\mathbb{Z} \simeq F_1$.

Diagramme de tresses

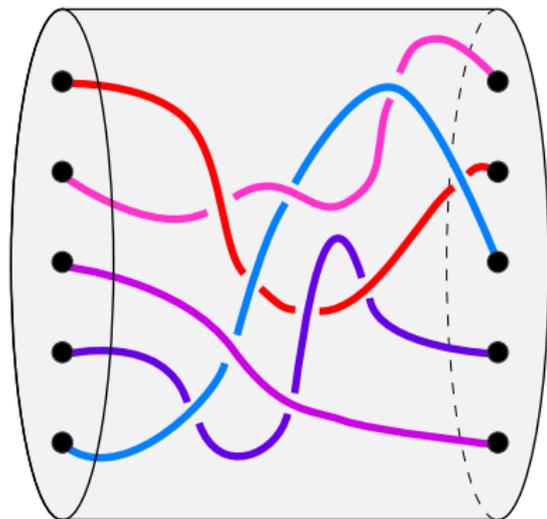


Diagramme de tresses

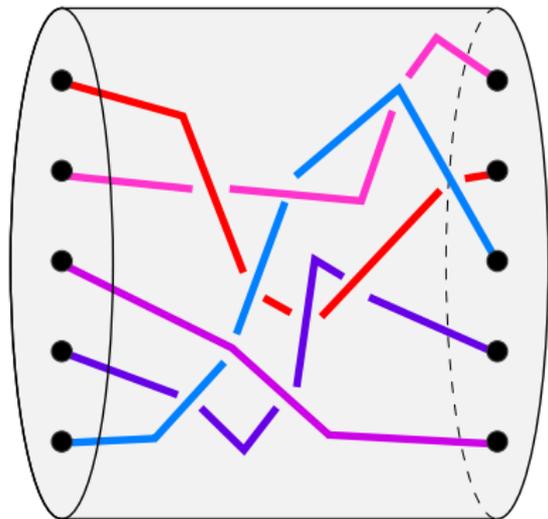
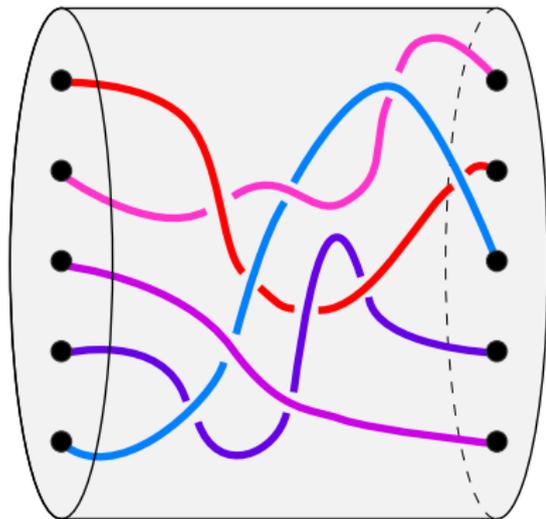


Diagramme de tresses

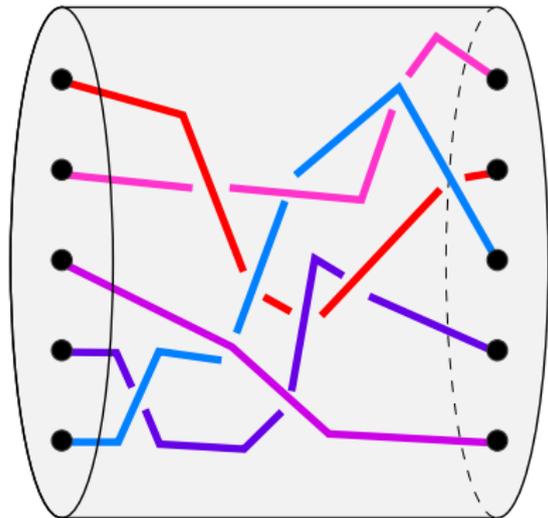
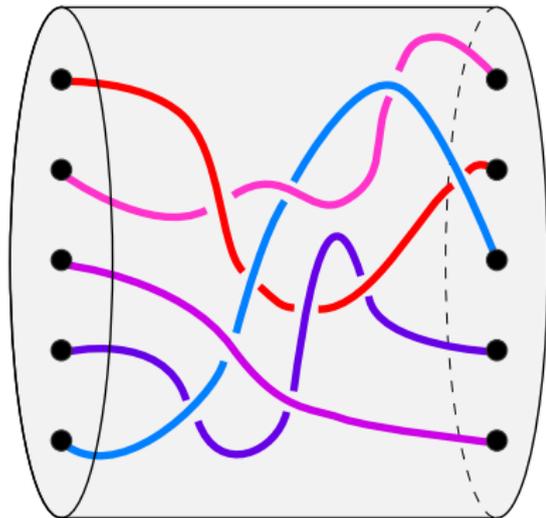


Diagramme de tresses

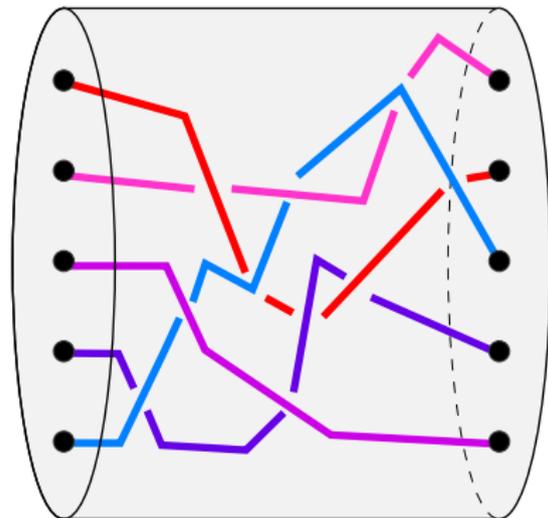
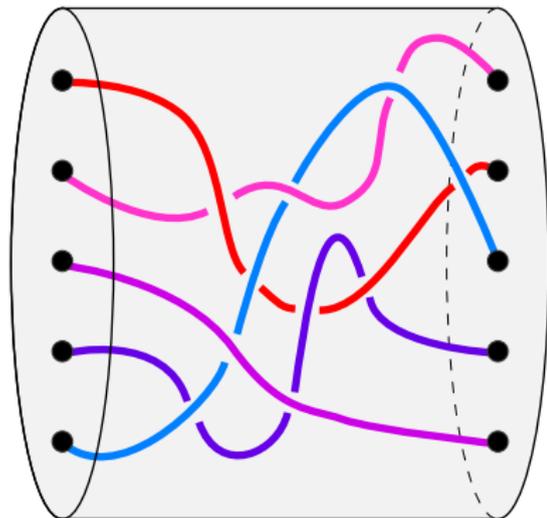


Diagramme de tresses

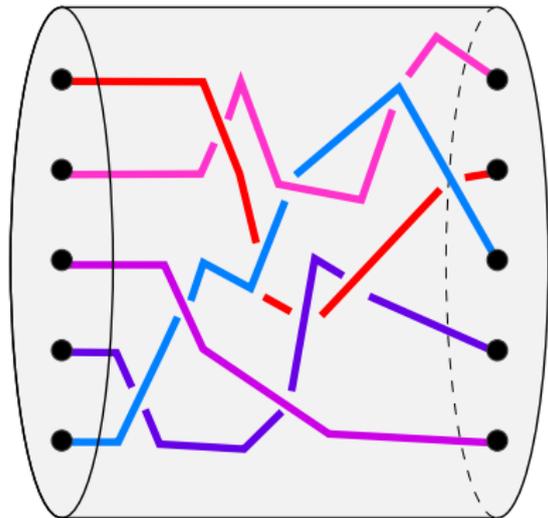
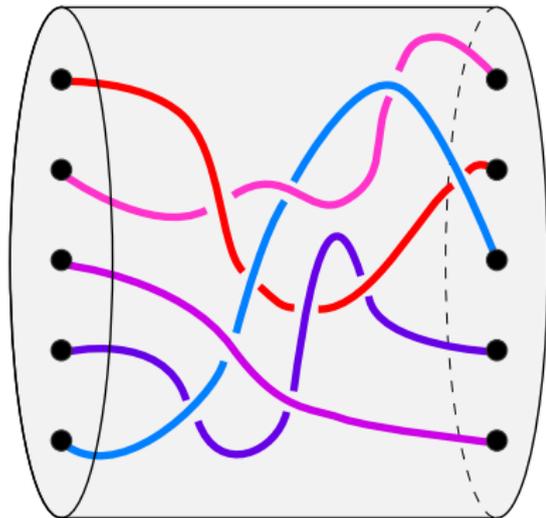


Diagramme de tresses

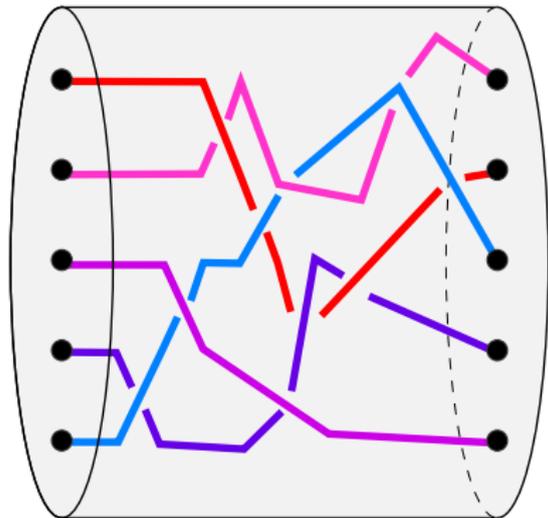
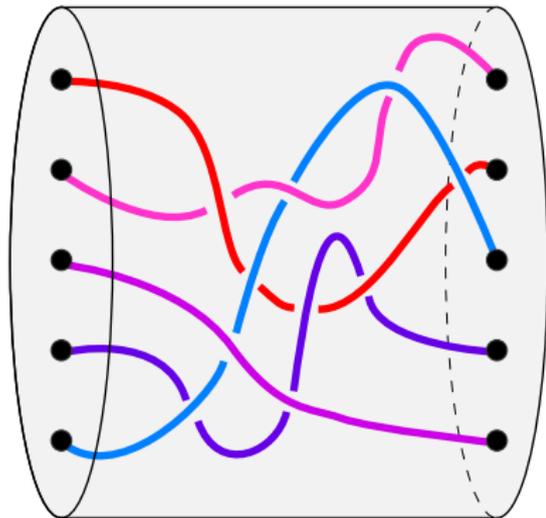


Diagramme de tresses

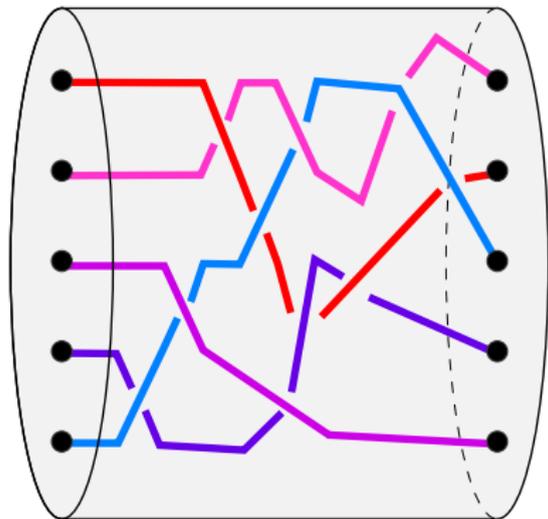
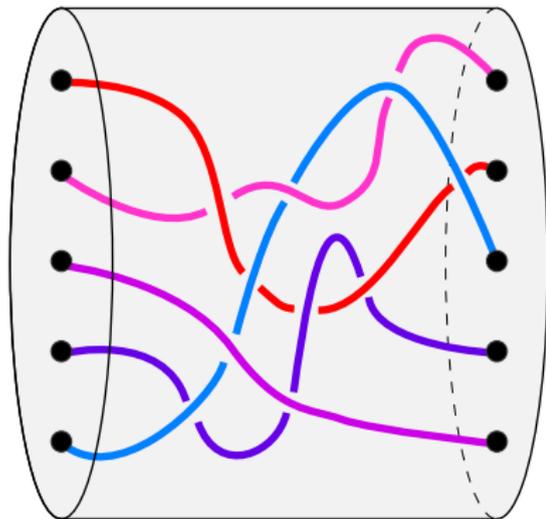


Diagramme de tresses

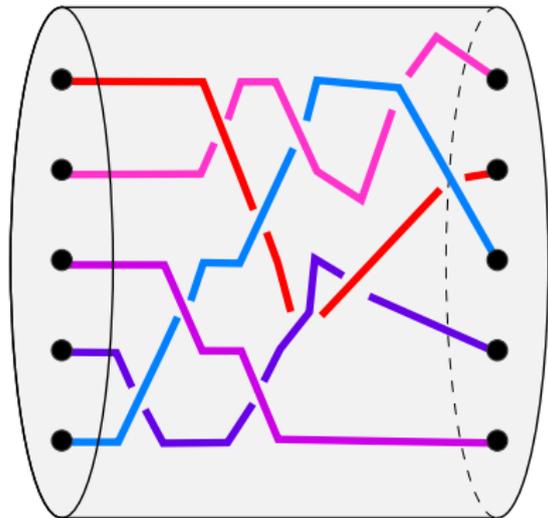
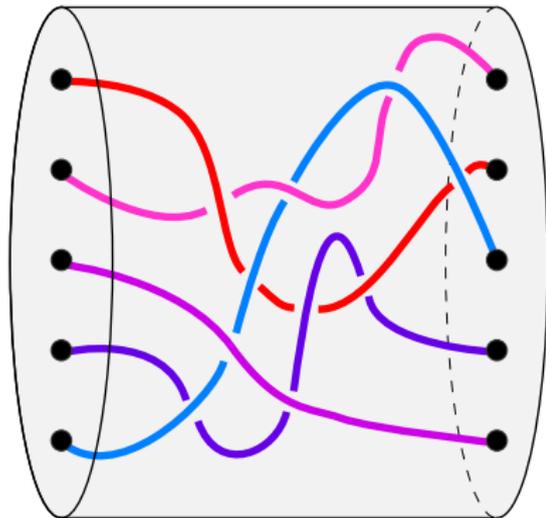


Diagramme de tresses

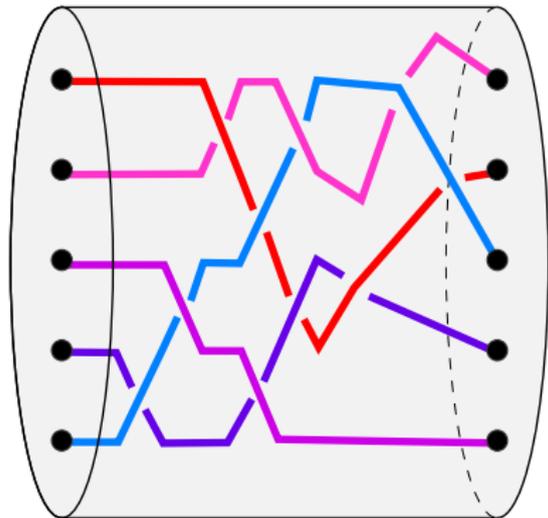
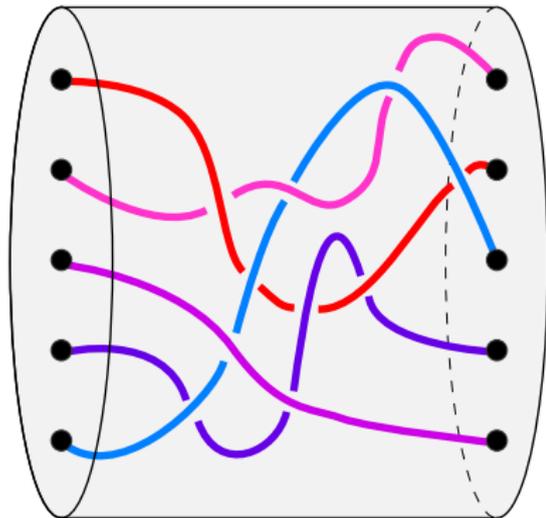


Diagramme de tresses

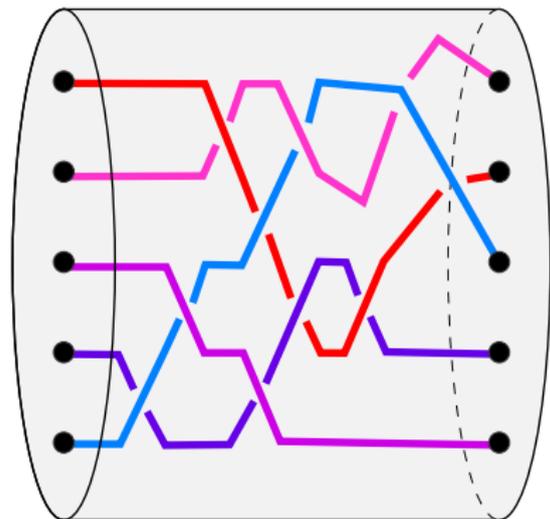
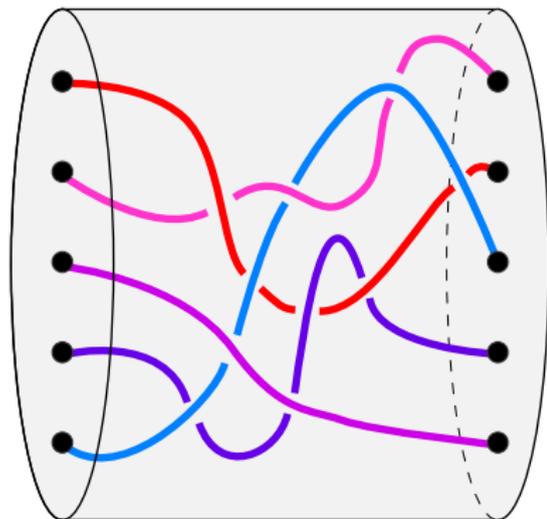


Diagramme de tresses

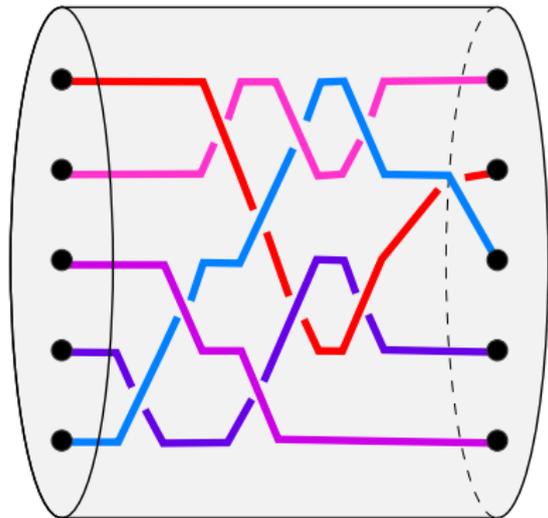
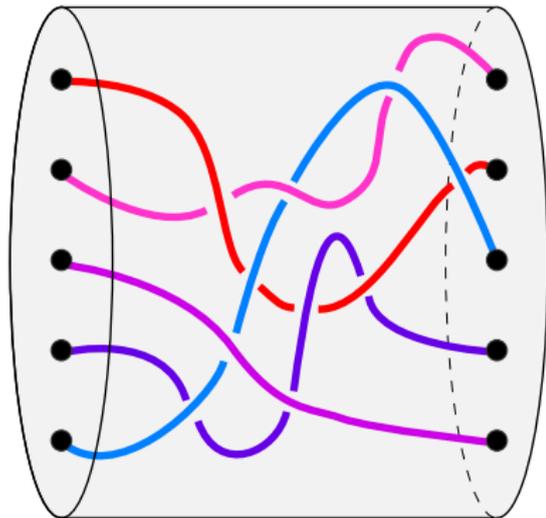


Diagramme de tresses

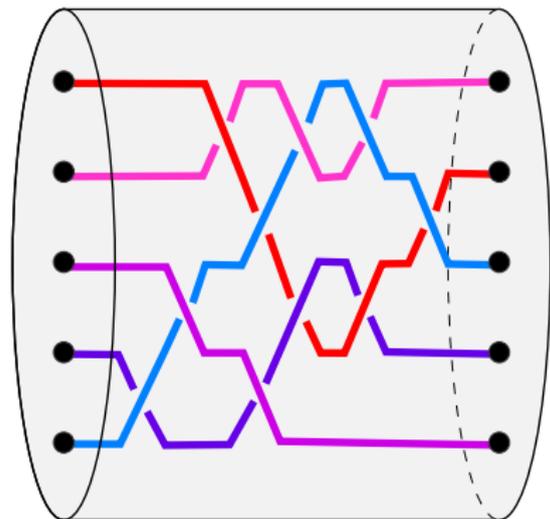
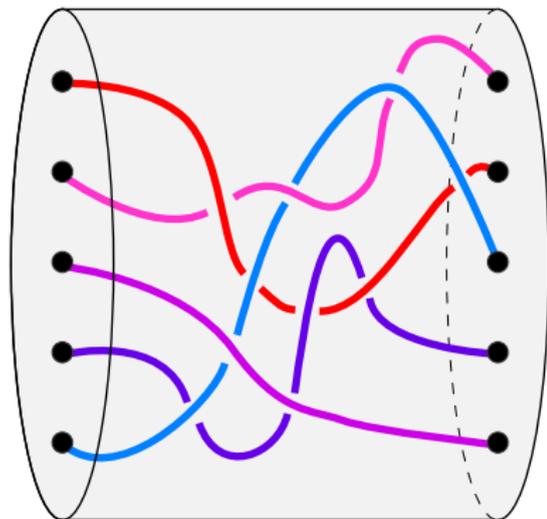


Diagramme de tresses

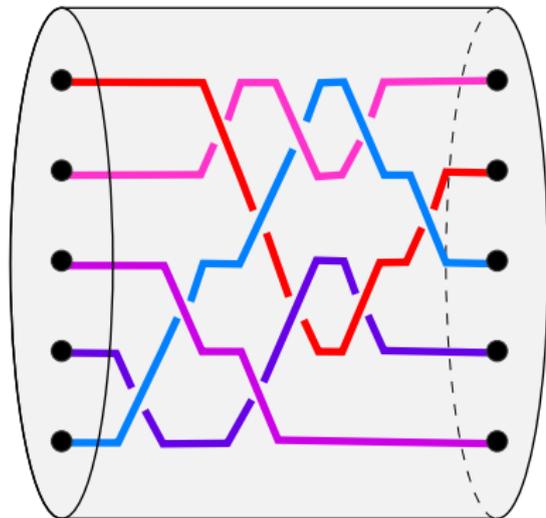


Diagramme de tresses

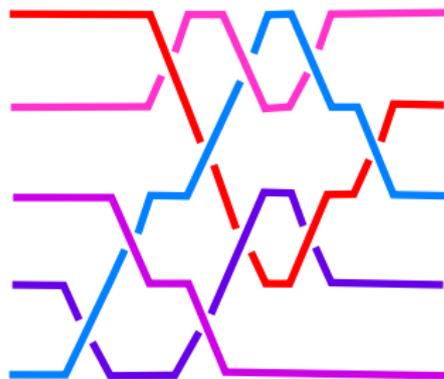
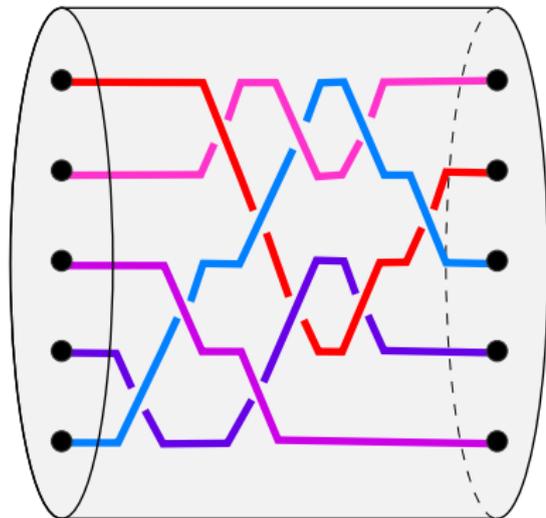


Diagramme de tresses

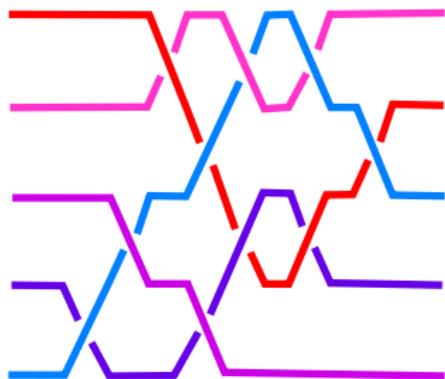


Diagramme de tresses

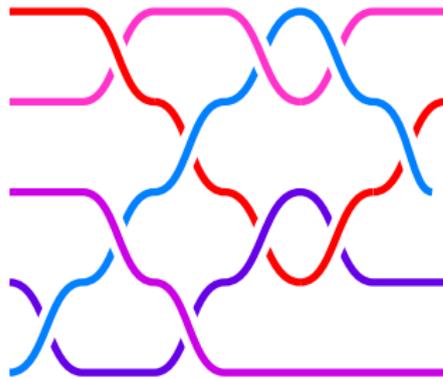
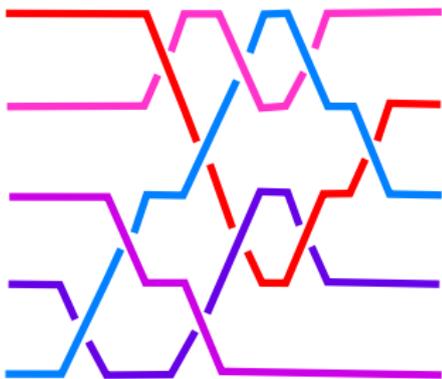


Diagramme de tresses

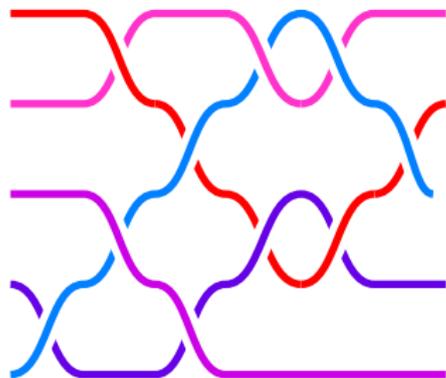


Diagramme de tresses

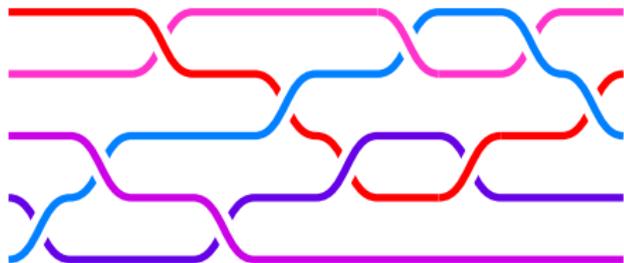
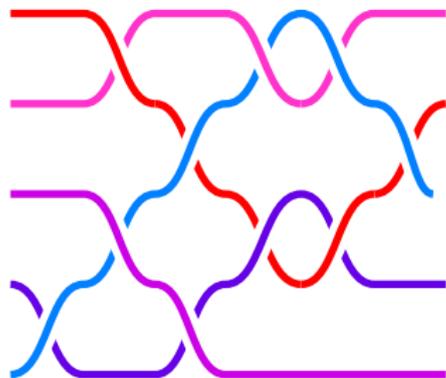


Diagramme de tresses

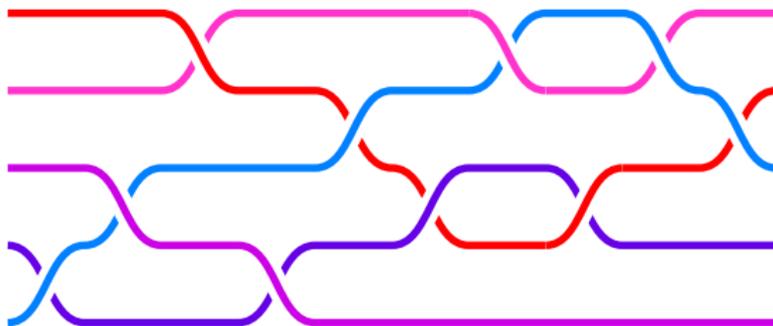


Diagramme de tresses

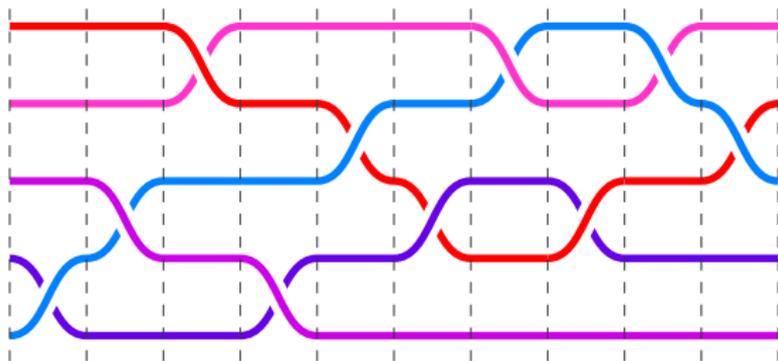


Diagramme de tresses

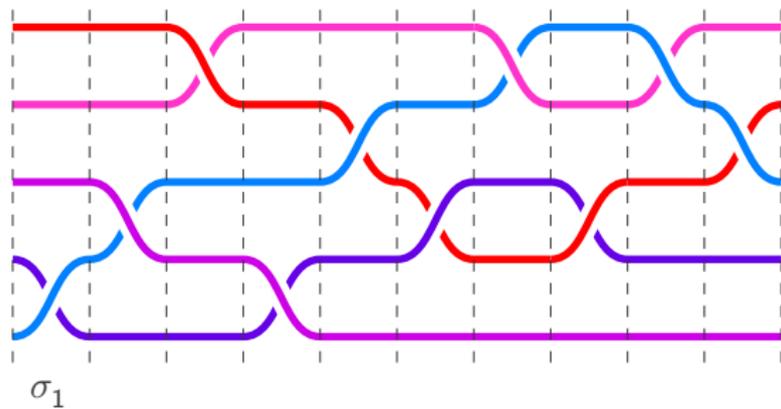


Diagramme de tresses

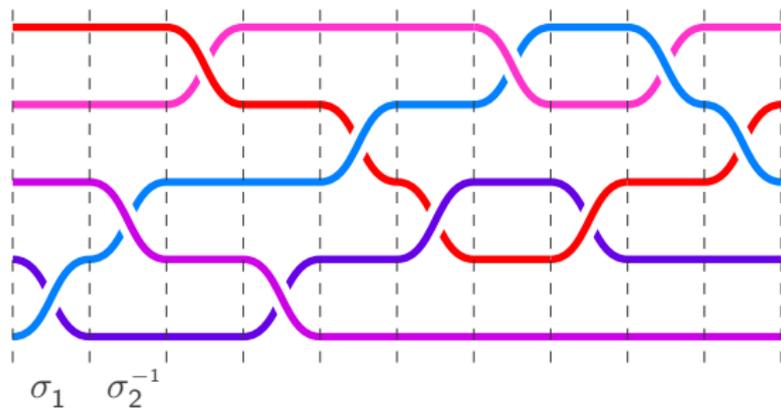


Diagramme de tresses

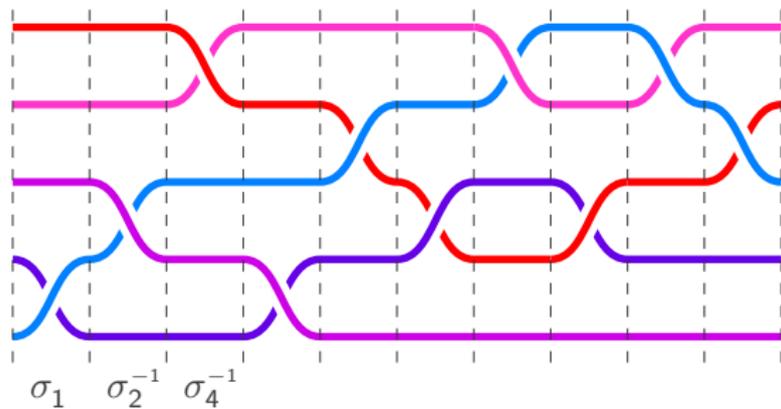


Diagramme de tresses

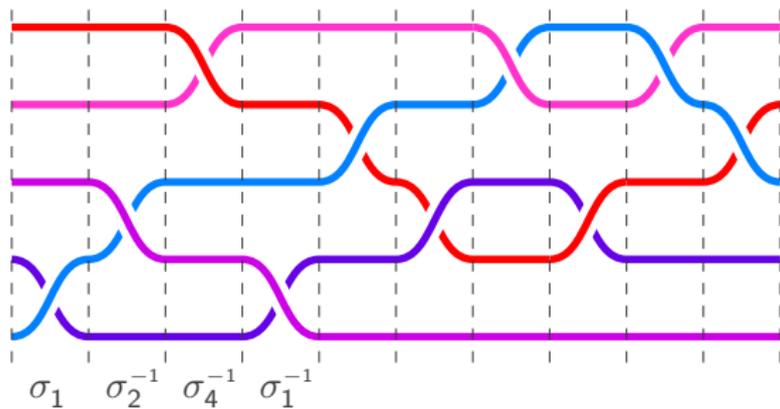


Diagramme de tresses

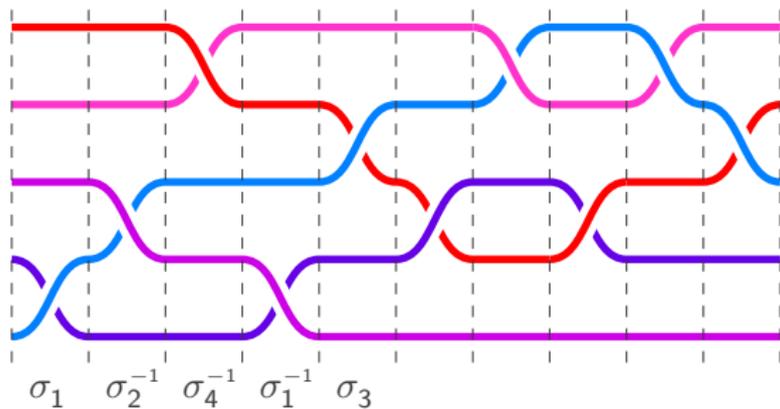


Diagramme de tresses

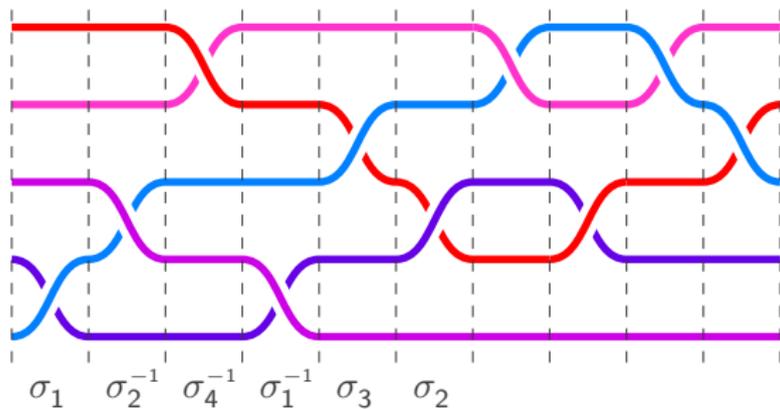


Diagramme de tresses

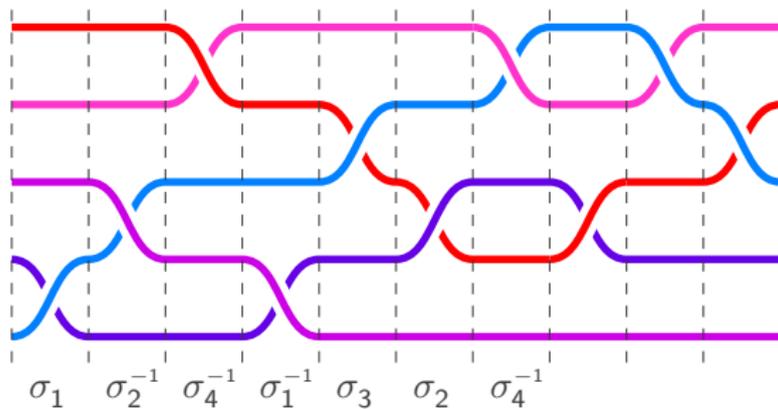


Diagramme de tresses

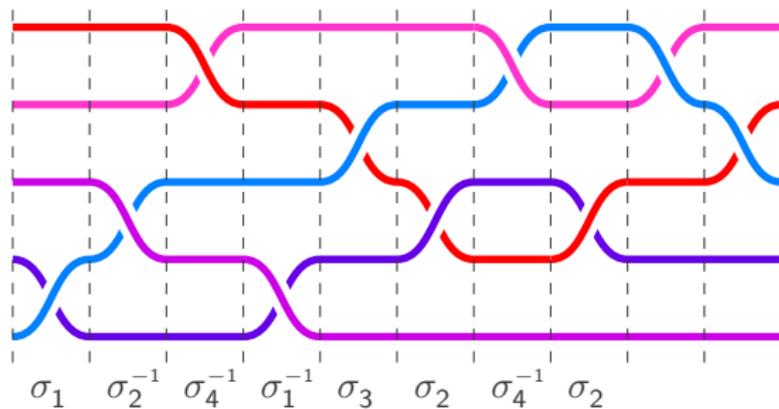


Diagramme de tresses

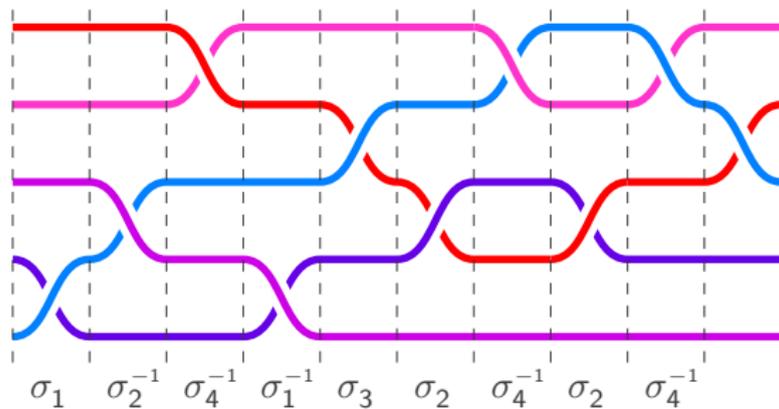
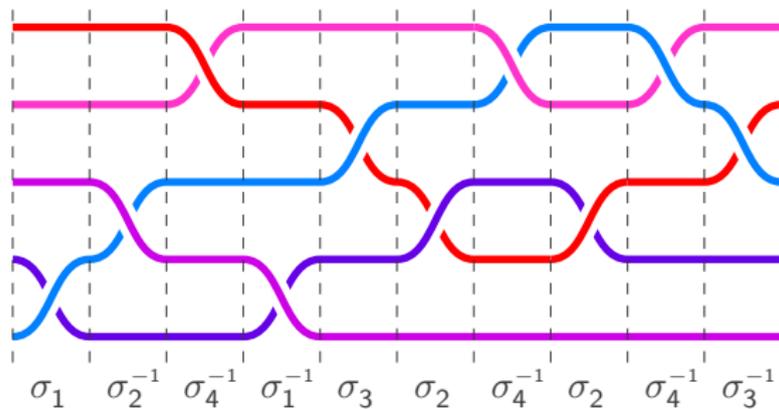


Diagramme de tresses



Présentation du groupe de tresses

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle .$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle .$$

$$\rightsquigarrow A = \{$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle .$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle .$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle .$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle .$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

σ_i

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

$$\sigma_i \leftrightarrow$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

$$\sigma_i \leftrightarrow \begin{array}{c} n \text{ ---} \\ \vdots \\ i+2 \text{ ---} \\ i+1 \text{ } \times \\ i \text{ } \text{ } \\ i-1 \text{ ---} \\ \vdots \\ 1 \text{ ---} \end{array}$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

$$\sigma_i \leftrightarrow \begin{array}{c} n \text{ ---} \\ \vdots \\ i+2 \text{ ---} \\ i+1 \text{ } \times \\ i \text{ } \times \\ i-1 \text{ ---} \\ \vdots \\ 1 \text{ ---} \end{array} \sigma_i^{-1}$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

$$\sigma_i \leftrightarrow \begin{array}{c} n \text{ ---} \\ \vdots \\ i+2 \text{ ---} \\ i+1 \text{ } \times \\ i \text{ } \times \\ i-1 \text{ ---} \\ \vdots \\ 1 \text{ ---} \end{array} \quad \sigma_i^{-1} \leftrightarrow$$

Présentation du groupe de tresses

Construisons un alphabet A et des relations R tels que :

$$(B_n, \times, 1) \simeq \langle A \mid R \rangle.$$

$$\rightsquigarrow A = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}.$$

$$\sigma_i \leftrightarrow \begin{array}{c} n \text{ ---} \\ \vdots \\ i+2 \text{ ---} \\ i+1 \text{ } \times \\ i \text{ } \times \\ i-1 \text{ ---} \\ \vdots \\ 1 \text{ ---} \end{array} \quad \sigma_i^{-1} \leftrightarrow \begin{array}{c} n \text{ ---} \\ \vdots \\ i+2 \text{ ---} \\ i+1 \text{ } \times \\ i \text{ } \times \\ i-1 \text{ ---} \\ \vdots \\ 1 \text{ ---} \end{array}$$

Relations des mots de tresses

Relations des mots de tresses



Relations des mots de tresses

σ_1

Relations des mots de tresses

$\sigma_1 \leftrightarrow$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \leftrightarrow \text{X}$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{X}$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagramme de tresse inverses}$$
Le diagramme de tresse inverses est représenté par deux courbes qui se croisent. La courbe de gauche est au-dessus de la courbe de droite au point de croisement, et elles se rejoignent en dessous.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagramme} \approx$$
A diagram showing two strands that cross each other once. The strand on the left goes over the strand on the right, and then they cross back. This represents the identity relation in braid theory, where a braid followed by its inverse results in the identity braid.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2}$$


Diagram 1: A crossing where the top strand goes over the bottom strand.



Diagram 2: A crossing where the bottom strand goes over the top strand.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagramme} \approx$$
A diagram showing two strands that cross each other once. The strand on the left goes over the strand on the right, and then they cross again so the strand on the right goes over the strand on the left. This represents the identity relation in braid theory.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagramme} \approx \text{diagramme}$$


Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1}$$


Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{[Diagram of a crossing]} \approx \text{[Diagram of two parallel horizontal lines]} \quad \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{[Diagram of two strands crossing twice in opposite directions]} \approx \text{[Diagram of two parallel horizontal strands]} \quad \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{[Diagram of two strands crossing twice in opposite directions, mirrored to the first diagram]}$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{[crossing]} \approx \text{[parallel lines]} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{[crossing]}$$

$$\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{[crossing]}$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing}$$
The diagram illustrates two fundamental relations in braid theory. On the left, the expression $\sigma_1 \sigma_1^{-1}$ is shown to be equivalent to a crossing of two strands, which is further approximated by two parallel horizontal lines. On the right, the expression $\sigma_1^{-1} \sigma_1$ is shown to be equivalent to a crossing of two strands.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

The image shows two equations illustrating the relation between a braid and its inverse. The first equation shows the braid $\sigma_1 \sigma_1^{-1}$ is equivalent to two parallel horizontal lines. The second equation shows the braid $\sigma_1^{-1} \sigma_1$ is also equivalent to two parallel horizontal lines. In both cases, the braid is represented by two strands crossing, and the equivalence is shown with an approximation symbol \approx .

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2}$$

The diagram shows the relation $\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$ followed by a braid diagram with two strands crossing once (strand 1 over strand 2), then an approximation symbol \approx , and finally a diagram with two parallel horizontal strands.

$$\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagram shows the relation $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$ followed by a braid diagram with two strands crossing once (strand 2 over strand 1), then an approximation symbol \approx , and finally another braid diagram with two strands crossing once (strand 1 over strand 2).

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

The image shows two equations illustrating the relation between a braid and its inverse. The first equation shows the braid $\sigma_1 \sigma_1^{-1}$ is equivalent to two parallel horizontal lines. The second equation shows the braid $\sigma_1^{-1} \sigma_1$ is also equivalent to two parallel horizontal lines. In both cases, the braid is represented by two strands crossing, and the equivalence is shown with an approximation symbol \approx .

Relations des mots de tresses

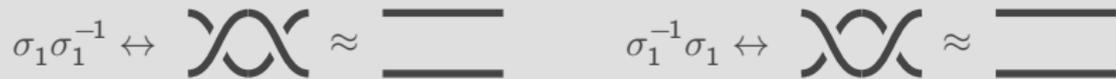
$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2}$$

The diagram shows the relation $\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow$ followed by a crossing of two strands (the top strand goes over the bottom strand), then an approximation symbol \approx , and finally two parallel horizontal strands.

$$\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagram shows the relation $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow$ followed by a crossing of two strands (the bottom strand goes over the top strand), then an approximation symbol \approx , and finally two parallel horizontal strands.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagramme} \approx \text{diagramme} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{diagramme} \approx \text{diagramme}$$


\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

σ_1

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \leftrightarrow$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \leftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{crossing} \end{array}$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{crossing} \approx \text{parallel lines}$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{crossing} \end{array}$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the top strand goes under the bottom strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \leftrightarrow \text{Diagram 6}$$

The diagrams show that the braid $\sigma_1 \sigma_3$ is equivalent to two diagrams. Diagram 5 shows two strands crossing, with the top strand going over the bottom strand. Diagram 6 shows two strands crossing, with the top strand going under the bottom strand.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagram shows two pairs of equations. The first pair shows $\sigma_1 \sigma_1^{-1}$ on the left, followed by a crossing of two strands (top-left to bottom-right), then an approximation symbol \approx , and finally two parallel horizontal strands. The second pair shows $\sigma_1^{-1} \sigma_1$ on the left, followed by a crossing of two strands (top-right to bottom-left), then an approximation symbol \approx , and finally two parallel horizontal strands.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6}$$

The diagram shows the equation $\sigma_1 \sigma_3$ on the left, followed by a crossing of two strands (top-left to bottom-right), then an approximation symbol \approx , and finally a crossing of two strands (top-right to bottom-left).

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6}$$

The diagrams show that the braid $\sigma_1 \sigma_3$ is equivalent to its mirror image. Diagram 5 shows the top strand crossing over the bottom strand, with the bottom strand crossing over the top strand. Diagram 6 shows the top strand crossing under the bottom strand, with the bottom strand crossing under the top strand.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The first part of the equation shows two pairs of diagrams. The first pair shows the identity $\sigma_1 \sigma_1^{-1} \approx \text{two parallel horizontal lines}$. The second pair shows the identity $\sigma_1^{-1} \sigma_1 \approx \text{two parallel horizontal lines}$. The diagrams are: a crossing where the top strand goes over the bottom strand, followed by a crossing where the bottom strand goes over the top strand, and finally two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6}$$

The second part of the equation shows two diagrams separated by an approximation symbol. The first diagram is a crossing between strands 1 and 3, where strand 1 goes over strand 3. The second diagram is a crossing between strands 1 and 3, where strand 3 goes over strand 1. The diagrams are: a crossing where the top strand goes over the bottom strand, followed by a crossing where the bottom strand goes over the top strand, and finally two parallel horizontal lines.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid followed by its inverse (or vice versa) is equivalent to two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6}$$

The diagrams show that the braid $\sigma_1 \sigma_3$ is equivalent to its mirror image.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The first equation shows that a braid followed by its inverse is equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \text{Diagram 7}$$

The second equation shows a relation between the braid $\sigma_1 \sigma_3$ and a crossing between strands 1 and 3. Diagram 5 is a crossing between strands 1 and 3 where strand 1 goes over strand 3. Diagram 6 is a crossing between strands 1 and 3 where strand 3 goes over strand 1. Diagram 7 is a crossing between strands 1 and 3 where strand 1 goes over strand 3. Diagrams 5 and 6 are connected by an approximation symbol \approx , and diagrams 6 and 7 are connected by an equivalence symbol \leftrightarrow .

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3$$

The diagrams show that the braid $\sigma_1 \sigma_3$ is equivalent to σ_3 . Diagram 5 shows the top strand crossing over the bottom strand, then the top strand crossing over the middle strand. Diagram 6 shows the top strand crossing over the middle strand, then the top strand crossing over the bottom strand. Diagram 6 is equivalent to σ_3 , where the middle strand crosses over the bottom strand.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The first equation shows that a braid followed by its inverse is equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The second equation shows that a braid with strands 1 and 3 is equivalent to its mirror image. Diagram 5 is a crossing between strands 1 and 3 where strand 1 goes over strand 3. Diagram 6 is a crossing between strands 3 and 1 where strand 3 goes over strand 1. Diagrams 5 and 6 are connected by an approximation symbol \approx . The entire expression is connected by braid relations \leftrightarrow .

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid followed by its inverse (or vice versa) is equivalent to two parallel horizontal lines.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that the braid $\sigma_1 \sigma_3$ is equivalent to $\sigma_3 \sigma_1$ via a sequence of Reidemeister moves.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show the cancellation of adjacent strands in a braid. Diagram 1 and 2 are connected by an equivalence symbol \approx . Diagram 3 and 4 are also connected by an equivalence symbol \approx . Diagram 1 and 3 are connected by a double-headed arrow \leftrightarrow .

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that strands that are two positions apart in a braid can be swapped without changing the braid. Diagram 5 and 6 are connected by an equivalence symbol \approx . Diagram 5 and 6 are also connected to $\sigma_1 \sigma_3$ and $\sigma_3 \sigma_1$ respectively by double-headed arrows \leftrightarrow .

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram}$$

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram}$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

σ_1

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram}$$

The diagram for $\sigma_1 \sigma_1^{-1}$ shows two strands crossing twice in opposite directions, which is equivalent to two parallel horizontal strands.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{diagram} \approx \text{diagram} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagram shows two crossings between strands 1 and 3, one above the other, which is equivalent to two parallel horizontal strands.

\rightsquigarrow Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \quad \leftrightarrow$$

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show the equivalence of a crossing and two parallel strands. In the first pair, the crossing is formed by the top strand crossing over the bottom strand. In the second pair, the crossing is formed by the bottom strand crossing over the top strand.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that two crossings of strands 1 and 3 are equivalent. Diagram 5 shows strand 1 crossing over strand 3, and Diagram 6 shows strand 3 crossing over strand 1.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7}$$

The diagram shows a crossing of strands 1 and 2, with a horizontal line above the crossing.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

Diagram 1: Two strands crossing, top-left to bottom-right.
 Diagram 2: Two parallel horizontal strands.
 Diagram 3: Two strands crossing, top-right to bottom-left.
 Diagram 4: Two parallel horizontal strands.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

Diagram 5: Strand 1 crosses over strand 3.
 Diagram 6: Strand 3 crosses over strand 1.
 Diagram 7: Strand 1 crosses under strand 3.
 Diagram 8: Strand 3 crosses under strand 1.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \leftrightarrow \text{Diagram 9}$$

Diagram 9: Strand 1 crosses over strand 2.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that braiding strands that are not adjacent is equivalent to the reverse braid. Diagram 5 shows strand 1 crossing over strand 3. Diagram 6 shows strand 3 crossing over strand 1. Diagrams 5 and 6 are connected by an approximation symbol.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \leftrightarrow \text{Diagram 7}$$

The diagram shows a crossing between strands 1 and 2, where strand 1 goes over strand 2.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. The first diagram is a crossing where the left strand goes over the right strand. The second diagram is two parallel horizontal strands. The third diagram is a crossing where the right strand goes over the left strand. The fourth diagram is two parallel horizontal strands.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two crossings of strands that are far apart. Diagram 5 shows the left strand crossing over the right strand. Diagram 6 shows the right strand crossing over the left strand. The diagrams are shown to be equivalent to each other and to the reverse order of crossings.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7}$$

The diagram shows a braid with three strands. The left strand crosses over the middle strand, then the middle strand crosses over the right strand, and finally the left strand crosses over the middle strand again.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that two crossings of strands that are not adjacent are equivalent. Diagram 5 shows the top strand crossing over the bottom strand. Diagram 6 shows the bottom strand crossing over the top strand. Both diagrams result in two parallel horizontal lines.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7}$$

The diagram shows a braid with three strands. The top strand crosses over the middle strand, then the middle strand crosses over the bottom strand, and finally the top strand crosses over the middle strand again.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that two crossings of strands that are not adjacent are equivalent. Diagram 5 shows strand 1 crossing over strand 3. Diagram 6 shows strand 3 crossing over strand 1. Diagrams 5 and 6 are connected by an approximation symbol.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8}$$

The diagrams show the Reidemeister III relation. Diagram 7 shows a sequence of three crossings: strand 1 over 2, then 2 over 1, then 1 over 2. Diagram 8 shows a sequence of three crossings: strand 2 over 1, then 1 over 2, then 2 over 1. The two diagrams are connected by an approximation symbol.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. In the first pair, the strands cross such that the top strand goes from top-left to bottom-right and the bottom strand goes from top-right to bottom-left. In the second pair, the strands cross such that the top strand goes from top-right to bottom-left and the bottom strand goes from top-left to bottom-right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two crossings between strands 1 and 3. In the first pair, strand 1 crosses over strand 3. In the second pair, strand 3 crosses over strand 1. The strands are labeled 1, 2, 3 from left to right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8}$$

The diagrams show a braid of three strands. In the first pair, strand 1 crosses over strand 2, then strand 2 crosses over strand 1, and finally strand 1 crosses over strand 2. In the second pair, strand 1 crosses over strand 2, then strand 1 crosses over strand 2 again, and finally strand 2 crosses over strand 1.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show that a braid and its inverse are equivalent to two parallel horizontal lines. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal lines. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal lines.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show that two crossings of strands that are not adjacent are equivalent. Diagram 5 shows strand 1 crossing over strand 3. Diagram 6 shows strand 3 crossing over strand 1. Diagrams 5 and 6 are connected by an approximation symbol.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8}$$

The diagrams show the braid relation for adjacent strands. Diagram 7 is the braid $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$. Diagram 8 is the braid $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$. The two diagrams are connected by an approximation symbol.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. In the first pair, the strands cross such that the top strand goes from top-left to bottom-right and the bottom strand goes from top-right to bottom-left. In the second pair, the strands cross such that the top strand goes from top-right to bottom-left and the bottom strand goes from top-left to bottom-right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two crossings between strands 1 and 3. In the first pair, strand 1 crosses over strand 3. In the second pair, strand 3 crosses over strand 1. The strands are labeled 1, 2, 3 from left to right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8}$$

The diagrams show a braid of three strands. In the first diagram, strand 1 crosses over strand 2, then strand 2 crosses over strand 1, and finally strand 1 crosses over strand 2. In the second diagram, strand 2 crosses over strand 1, then strand 1 crosses over strand 2, and finally strand 2 crosses over strand 1.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show the equivalence of a crossing and a parallel strand. Diagram 1 is a crossing where the top strand goes over the bottom strand. Diagram 2 is two parallel horizontal strands. Diagram 3 is a crossing where the bottom strand goes over the top strand. Diagram 4 is two parallel horizontal strands.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show the commutation of two crossings. Diagram 5 is two crossings: the top one has the left strand over the right, and the bottom one has the right strand over the left. Diagram 6 is two crossings: the top one has the right strand over the left, and the bottom one has the left strand over the right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8} \leftrightarrow \text{Diagram 9}$$

The diagrams show the braid relation. Diagram 7 is a sequence of three crossings: the top one has the left strand over the middle, the middle over the right, and the top over the middle. Diagram 8 is a sequence of three crossings: the top one has the middle over the right, the middle over the left, and the top over the middle. Diagram 9 is a sequence of three crossings: the top one has the middle over the left, the middle over the right, and the top over the middle.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. In the first pair, the strands cross such that the top strand goes from top-left to bottom-right. In the second pair, the strands cross such that the bottom strand goes from top-left to bottom-right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two crossings between strands 1 and 3. In the first pair, strand 1 crosses over strand 3. In the second pair, strand 3 crosses over strand 1. The strands are labeled 1, 2, 3 from left to right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8} \leftrightarrow \sigma_2$$

The diagrams show a braid of three strands. In the first pair, strand 1 crosses over strand 2, then strand 1 crosses over strand 2 again. In the second pair, strand 2 crosses over strand 1, then strand 2 crosses over strand 1 again.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. In the first pair, the strands cross such that the top strand goes from top-left to bottom-right and the bottom strand goes from top-right to bottom-left. In the second pair, the strands cross such that the top strand goes from top-right to bottom-left and the bottom strand goes from top-left to bottom-right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two crossings between strands 1 and 3. In the first pair, strand 1 crosses over strand 3. In the second pair, strand 3 crosses over strand 1. The strands are labeled 1, 2, 3 from left to right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8} \leftrightarrow \sigma_2 \sigma_1$$

The diagrams show a braid of three strands. In the first pair, strand 1 crosses over strand 2, then strand 2 crosses over strand 1, and finally strand 1 crosses over strand 2. In the second pair, strand 2 crosses over strand 1, then strand 1 crosses over strand 2, and finally strand 2 crosses over strand 1.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. In the first pair, the strands cross such that the top strand goes from top-left to bottom-right. In the second pair, the strands cross such that the bottom strand goes from top-left to bottom-right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two crossings between strands 1 and 3. In the first pair, strand 1 crosses over strand 3. In the second pair, strand 3 crosses over strand 1. The strands are labeled 1, 2, 3 from left to right.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8} \leftrightarrow \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

The diagrams show a braid of three strands. In the first pair, strand 1 crosses over strand 2, then strand 2 crosses over strand 1. In the second pair, strand 2 crosses over strand 1, then strand 1 crosses over strand 2.

Relations des mots de tresses

$$\sigma_1 \sigma_1^{-1} \leftrightarrow \text{Diagram 1} \approx \text{Diagram 2} \quad \sigma_1^{-1} \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 3} \approx \text{Diagram 4}$$

The diagrams show a crossing of two strands being equivalent to two parallel strands. In the first pair, the strands cross once. In the second pair, the strands cross once in the opposite direction.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \varepsilon$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i = \varepsilon$.

$$\sigma_1 \sigma_3 \leftrightarrow \text{Diagram 5} \approx \text{Diagram 6} \leftrightarrow \sigma_3 \sigma_1$$

The diagrams show two strands crossing twice, with the crossings separated by one strand. The first pair shows the crossings in the same direction, and the second pair shows them in opposite directions.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \leftrightarrow \text{Diagram 7} \approx \text{Diagram 8} \leftrightarrow \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

The diagrams show three strands with two crossings between the first and second strands, and one crossing between the second and third strands. The crossings are rearranged to show the braid relation.

↪ Ajout des relations $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ pour $|i - j| = 1$.

Présentation du groupe de tresses B_n

Présentation du groupe de tresses B_n

- **Problème** : Est-ce que toutes les relations sur les mots de tresses sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

Présentation du groupe de tresses B_n

- **Problème** : Est-ce que toutes les relations sur les **mots de tresses** sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

↪ **Emil Artin** répond à cette question en

Présentation du groupe de tresses B_n

- **Problème** : Est-ce que toutes les relations sur les **mots de tresses** sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

↪ **Emil Artin** répond à cette question en **1947**.

Présentation du groupe de tresses B_n

- **Problème** : Est-ce que toutes les relations sur les **mots de tresses** sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

↪ **Emil Artin** répond à cette question en **1947**.

- **Théorème** :

Présentation du groupe de tresses B_n

- **Problème** : Est-ce que toutes les relations sur les **mots de tresses** sont obtenues de celles découvertes précédemment ?

↪ **Emil Artin** répond à cette question en **1947**.

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.
Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

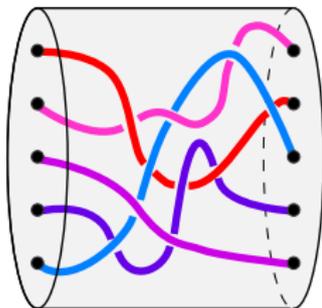
(au plus un croisement par colonne).

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).

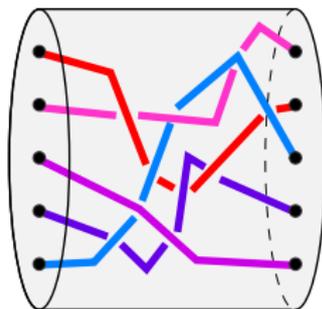
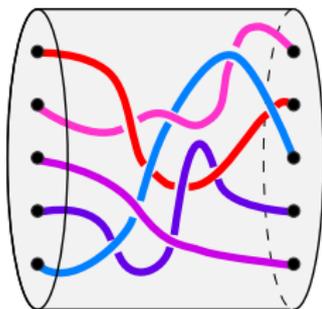


Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).

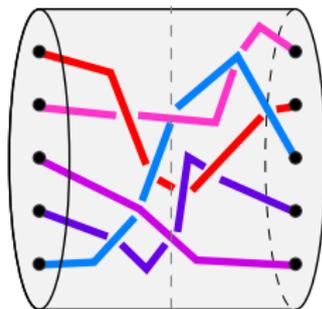
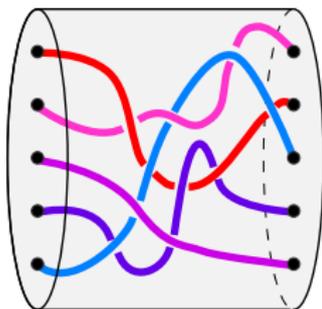


Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).

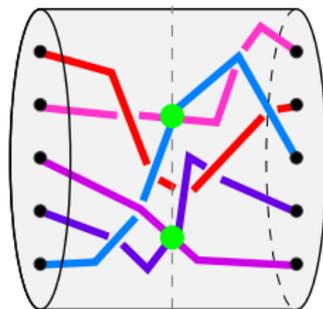
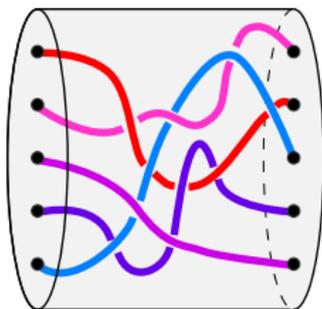


Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).

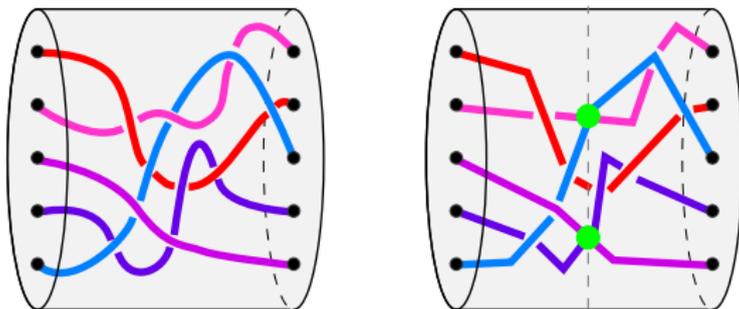


Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).



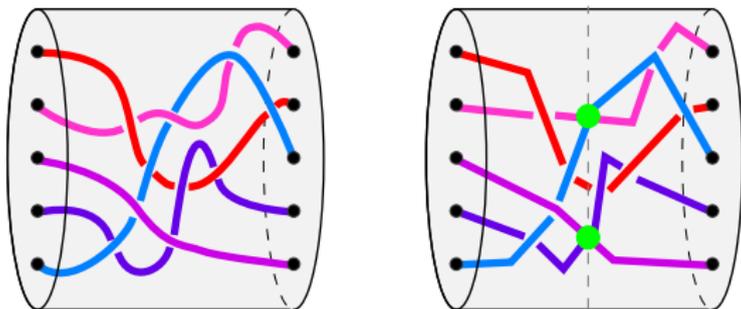
On utilisera les notations suivantes :

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).



On utilisera les notations suivantes :

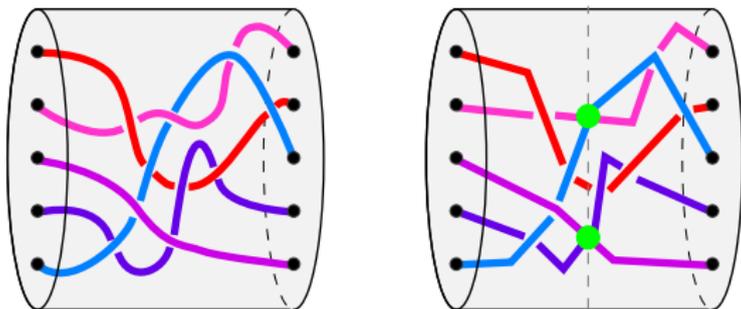
- \mathcal{GB}_n : ensemble des tresses géométriques à n -brins ;

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).



On utilisera les notations suivantes :

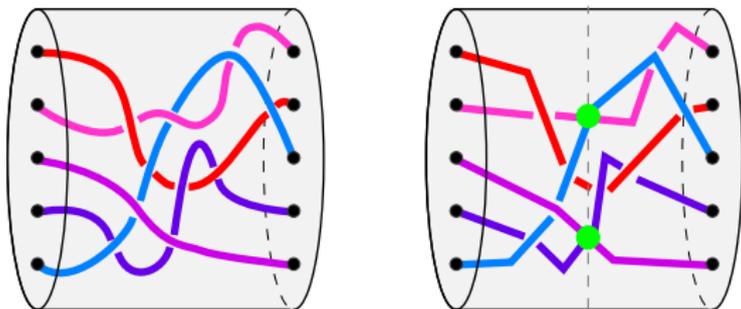
- \mathcal{GB}_n : ensemble des tresses géométriques à n -brins ;
- $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$: ensemble des tresses affines à n -brins ;

Démonstration du théorème d'Artin - Tresses affines

Une tresse **affine** est une tresse géométrique polygonale.

Elle est dite **régulière** si son projeté est régulier

(au plus un croisement par colonne).



On utilisera les notations suivantes :

- \mathcal{GB}_n : ensemble des tresses géométriques à n -brins ;
- $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$: ensemble des tresses affines à n -brins ;
- $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$: ensemble des tresses affines régulières à n -brins.

Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.

Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



- **Proposition** : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s \in [0,1]}$ dans

Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



- **Proposition** : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$ vérifiant :

Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



- **Proposition** : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$ vérifiant :
 - $\beta = \beta(0)$ et $\beta' = \beta(1)$;

Démonstration du théorème d'Artin - Isotopie

De ce qui précède, on obtient (presque) :

- **Proposition** : Toute tresse géométrique est isotope à une tresse affine régulière.



- **Proposition** : Deux tresses β et β' de $\mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sont isotopes ssi il existe un chemin $(\beta_s)_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$ vérifiant :
 - $\beta = \beta(0)$ et $\beta' = \beta(1)$;
 - $\beta(s) \in \mathcal{GB}_n^{\text{aff,reg}}$ sauf pour $s = s_i$ avec $0 < s_1 < \dots < s_m < 1$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.
Pour w et w' de \mathcal{BW}_n , on pose

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Pour w et w' de \mathcal{BW}_n , on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Pour w et w' de \mathcal{BW}_n , on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Pour w et w' de \mathcal{BW}_n , on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

- **Reformulation** : Pour tout $w, w' \in \mathcal{BW}_n$ on a $w \equiv w'$ ssi $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Pour w et w' de \mathcal{BW}_n , on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

- **Reformulation** : Pour tout $w, w' \in \mathcal{BW}_n$ on a $w \equiv w'$ ssi $w \sim w'$.

On a déjà que $w \equiv w'$ implique $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin – Reformulation

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle \quad (1)$$

Soit \mathcal{BW}_n l'ensemble des mots de tresses, i.e., les mots en $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

Pour w et w' de \mathcal{BW}_n , on pose

- $w \equiv w'$ si les mots w et w' sont équivalents pour les relations d'Artin,
- $w \sim w'$ si les tresses $\beta(w)$ et $\beta(w')$ sont isotopes.

- **Reformulation** : Pour tout $w, w' \in \mathcal{BW}_n$ on a $w \equiv w'$ ssi $w \sim w'$.

On a déjà que $w \equiv w'$ implique $w \sim w'$. Il reste à montrer la réciproque.

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$\beta(w)$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$\beta(w)$

$\beta(w')$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$$\beta(w) = \beta(0)$$

$$\beta(1) = \beta(w')$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$$\beta(w) = \beta(0) \quad \beta(s_1) \quad \beta(s_2) \quad \beta(s_3) \quad \beta(s_4) \quad \beta(1) = \beta(w')$$

– il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$$\beta(w) = \beta(0) \quad \beta(s_1) \quad \beta(s_2) \quad \beta(s_3) \quad \beta(s_4) \quad \beta(1) = \beta(w')$$


– il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$$\beta(w) = \beta(0) \quad \beta(s_1) \quad \beta(s_2) \quad \beta(s_3) \quad \beta(s_4) \quad \beta(1) = \beta(w')$$

- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$$\beta(w) = \beta(0) \quad \beta(s_1) \quad \beta(s_2) \quad \beta(s_3) \quad \beta(s_4) \quad \beta(1) = \beta(w')$$

- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.

$$\beta(w) = \beta(0) \quad \beta(s_1) \quad \beta(s_2) \quad \beta(s_3) \quad \beta(s_4) \quad \beta(1) = \beta(w')$$

- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

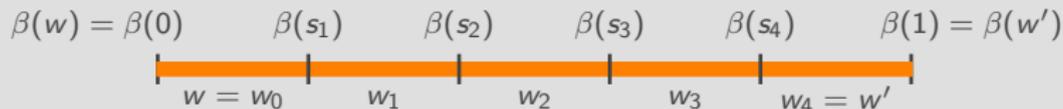
Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

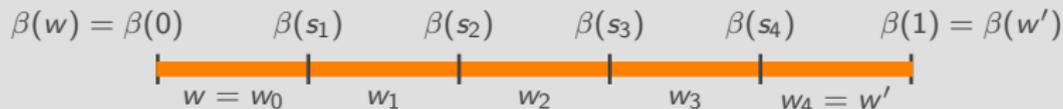
Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

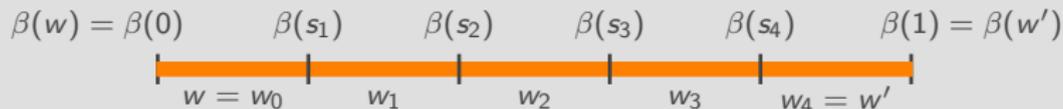
Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,
- il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k ,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

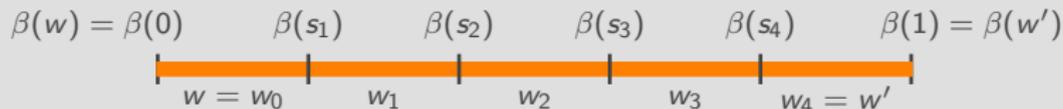
Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,
- il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k ,
- $\beta(s_k)$ est affine mais pas régulière,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

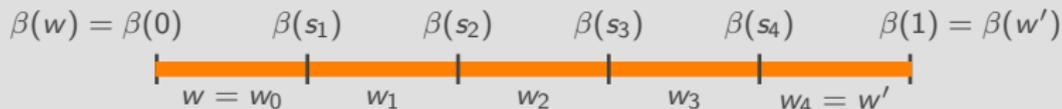
Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,
- il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k ,
- $\beta(s_k)$ est affine mais pas régulière,
 - \rightsquigarrow au moins deux croisements de $\beta(s_k)$ sont sur le même colonne,

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Soient w et w' dans \mathcal{BW}_n tels que $w \sim w'$.



- il existe une suite $(\beta(s))_{s \in [0,1]}$ dans $\mathcal{GB}_n^{\text{aff}}$,
- $\omega_k : s \mapsto \text{mot}(\beta_s)$ est continue sur $]s_k, s_{k+1}[$ et à valeur dans \mathcal{BW}_n ,
- comme \mathcal{BW}_n est discret, ω_k est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$,
- il existe une suite $(w_k)_{k \in [0, m-1]}$,
- par construction $w_k \sim w'_k$,
- il suffit de montrer $w_k \equiv w'_k$ pour tout k ,
- $\beta(s_k)$ est affine mais pas régulière,
 - \rightsquigarrow au moins deux croisements de $\beta(s_k)$ sont sur le même colonne,
 - \rightsquigarrow quitte à affiner $(\beta_s)_s$ on peut supposer qu'il y en a deux.

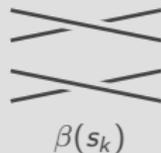
Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$\beta(s_k)$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$\beta(s_k)$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



— $\beta(s_k)$ —

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



— $\beta(s_k)$ —

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins



$$\beta(s_k)$$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

- Cas d'un point triple à deux brins



$$w_{k-1} = \sigma_i \sigma_i^{-1}$$



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

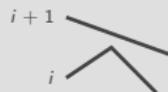
- Cas d'un point triple à deux brins



$$w_{k-1} = \sigma_i \sigma_i^{-1}$$



$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

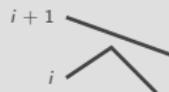
- Cas d'un point triple à deux brins



$$w_{k-1} = \sigma_i \sigma_i^{-1}$$



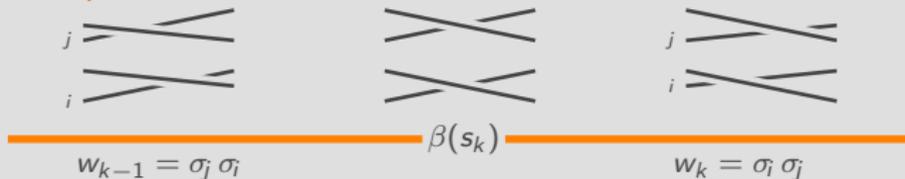
$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \varepsilon$$

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



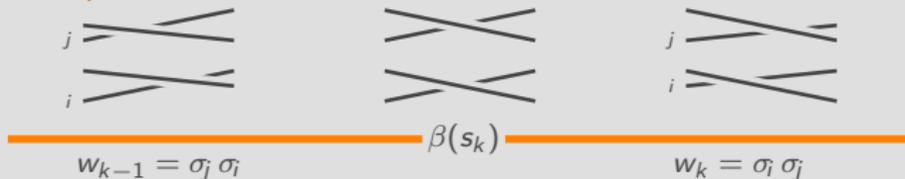
- Cas d'un point triple à deux brins



- Cas d'un point triple à trois brins

Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

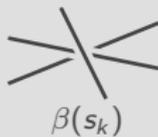
- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

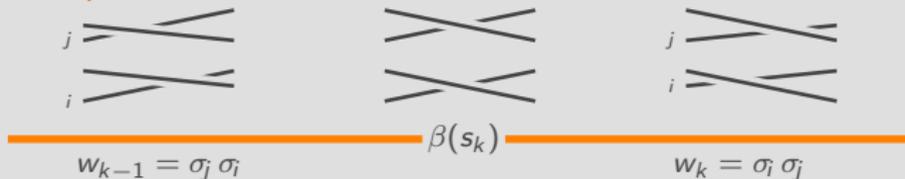


- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

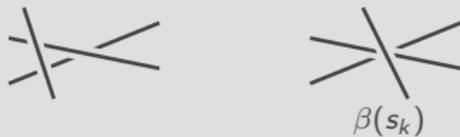
- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

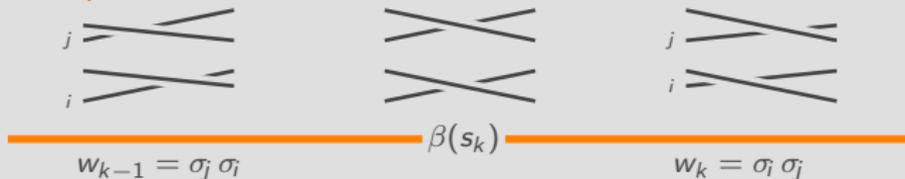


- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

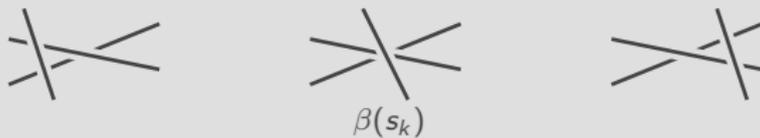
- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins



- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



$$w_{k-1} = \sigma_j \sigma_i$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \sigma_i \sigma_j$$

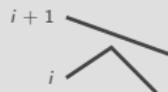
- Cas d'un point triple à deux brins



$$w_{k-1} = \sigma_i \sigma_i^{-1}$$



$$\beta(s_k)$$



$$w_k = \varepsilon$$

- Cas d'un point triple à trois brins

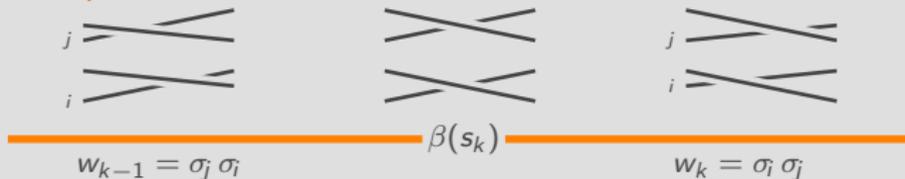


$$\beta(s_k)$$



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

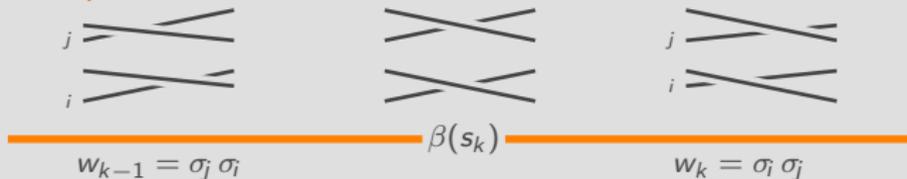


- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

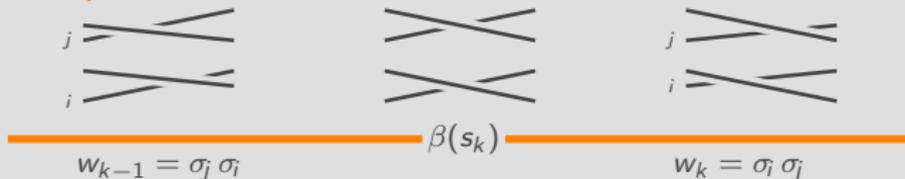


- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

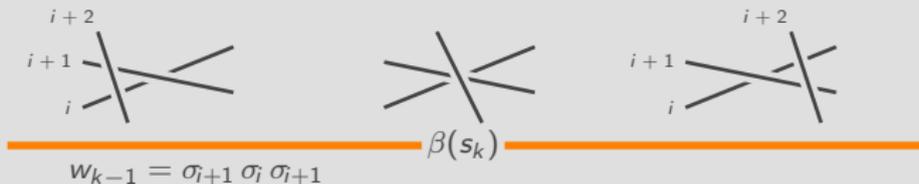
- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins

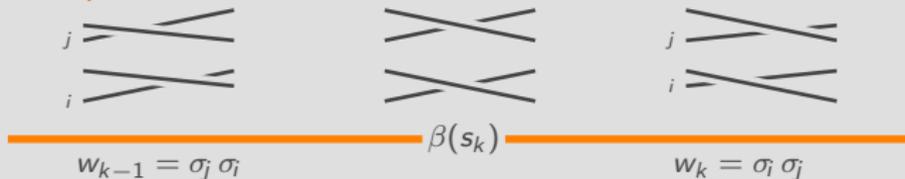


- Cas d'un point triple à trois brins



Démonstration du théorème d'Artin - Idée de la réciproque

- Cas de deux points doubles



- Cas d'un point triple à deux brins



- Cas d'un point triple à trois brins



Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β' .

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β' .

On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β' .

On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

- **Problème du mot :**

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β' .

On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

- **Problème du mot** : Quelque soit w et w' , déterminer si on a $w \equiv w'$.

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β' .

On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

- **Problème du mot** : Quelque soit w et w' , déterminer si on a $w \equiv w'$.

↪ Ce problème est

Problème du mot

- **Théorème** : Le groupe de tresses B_n est présenté par

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

- **Solution au problème d'isotopie.**

Soient β et β' deux tresses géométriques à n brins.

Soient w et w' des mots de tresses affines régulières isotopes à β et β' .

On a $\beta \sim \beta'$ si et seulement si $w \equiv w'$.

- **Problème du mot** : Quelque soit w et w' , déterminer si on a $w \equiv w'$.

↪ Ce problème est indécidable en général (Novikov 1952).

Groupes d'Artin

Groupes d'Artin

Les groupes d'Artin sont une généralisation des groupes de tresses.

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

- **Question** : Le problème du mot est-il décidable pour $A_{S,M}$?

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

• **Question** : Le problème du mot est-il décidable pour $A_{S,M}$?

↪ pas de réponse en général.

Groupes d'Artin

Les **groupes d'Artin** sont une généralisation des groupes de tresses.
Si S est un ensemble fini.

$$A_{S,M} = \langle S \mid \underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{t,s}} \rangle$$

où $M = (m_{s,t})_{S \times S}$ est une matrice symétrique à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
et vérifie $m_{s,t} = 1$ si et seulement si $s = t$.

• **Question** : Le problème du mot est-il décidable pour $A_{S,M}$?

↪ pas de réponse en général.

• **Exemple** :

$$\left\langle a, b, c, d \mid \begin{array}{lll} aba = bab, & aca = cac, & ada = dad \\ bcb = cbc, & bdb = dbd, & cd = dc \end{array} \right\rangle$$