Comment s'élabore une théorie mathématique?

Quelques pistes issues de l'histoire de le théorie de la mesure et de la théorie de Galois

Caroline Ehrhardt

Université Paris 8 - IDHES (UMR 8533)

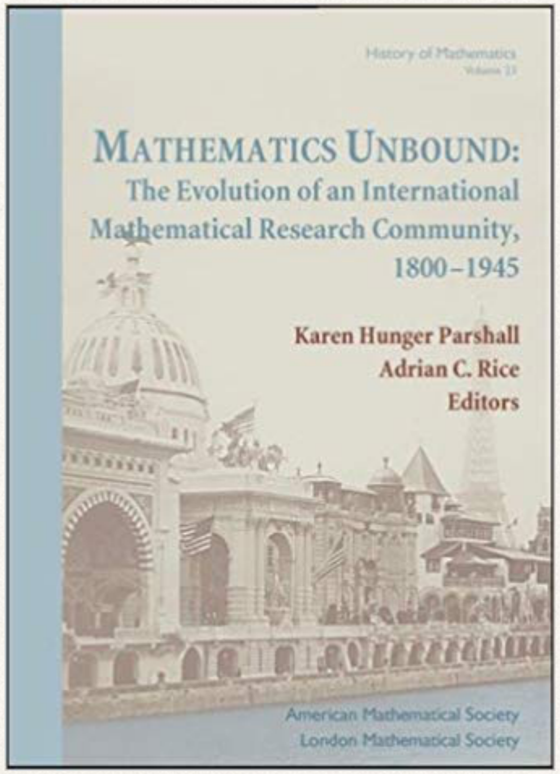
UNIVERSITÉ PARIS 8 VINCENNES-SAINT-DENIS

IDHES UMR 8533

Introduction

Tendances de l'histoire des mathématiques aujourd'hui

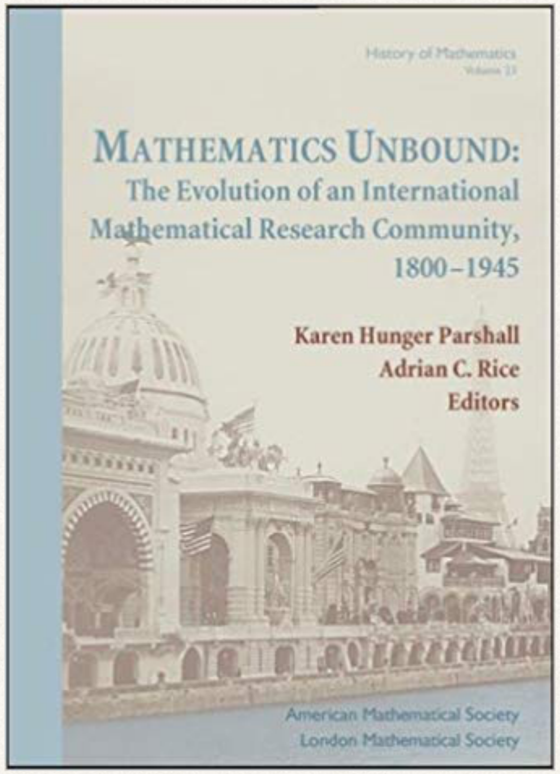
Supports institutionnels, communautés



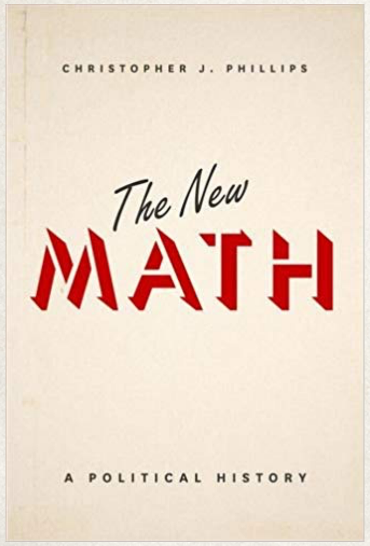
Introduction

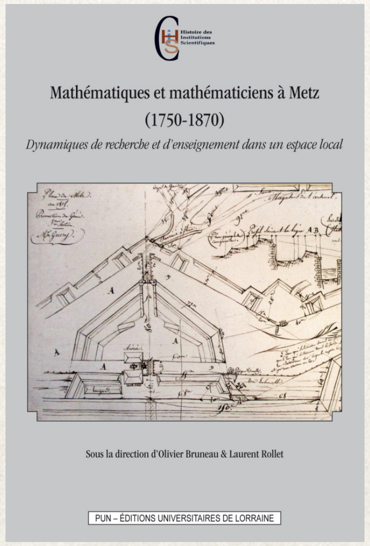
Tendances de l'histoire des mathématiques aujourd'hui

Supports institutionnels, communautés



Enseignement

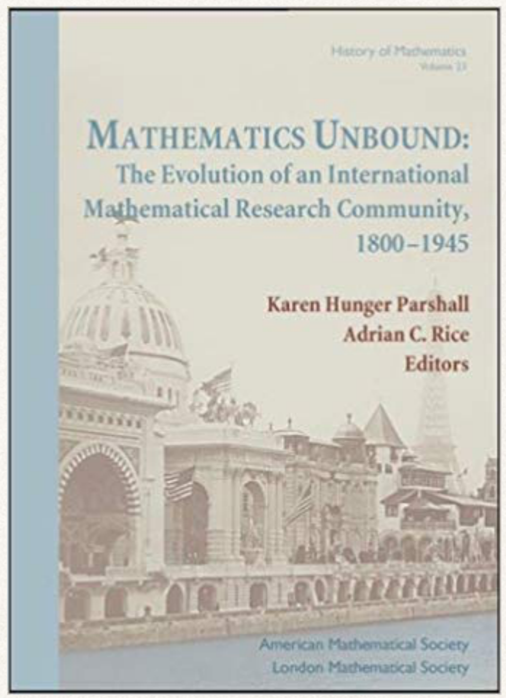




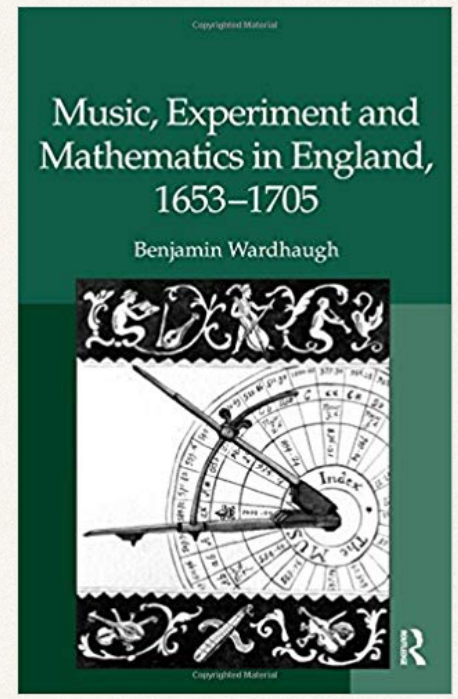
Introduction

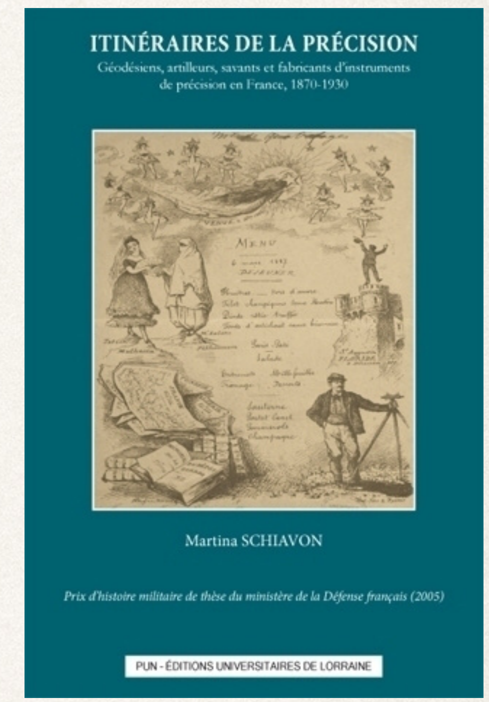
Tendances de l'histoire des mathématiques aujourd'hui

Supports institutionnels, communautés

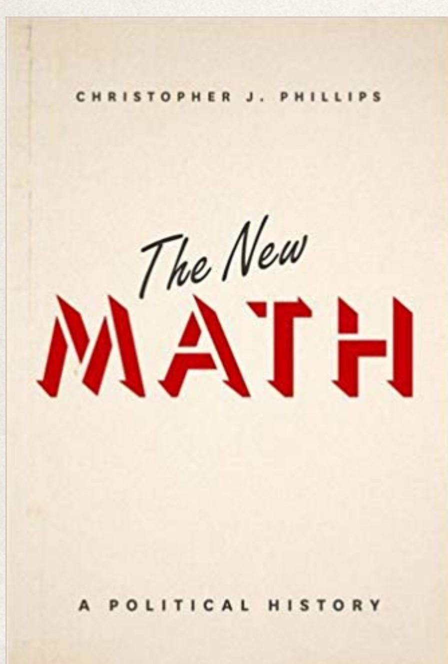


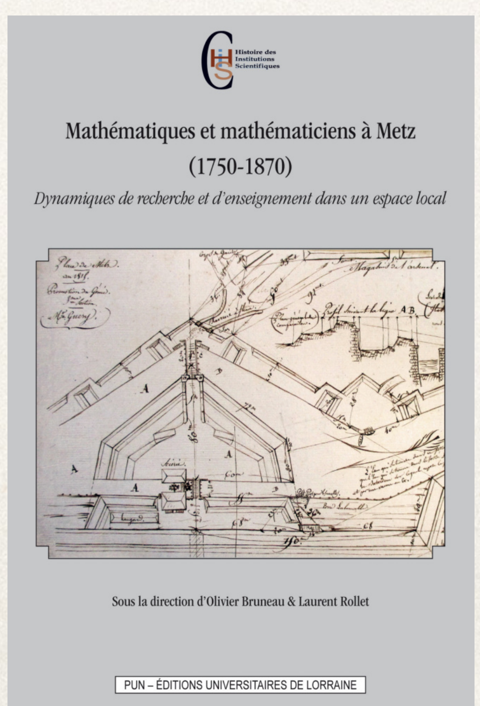
Relations à d'autres domaines





Enseignement

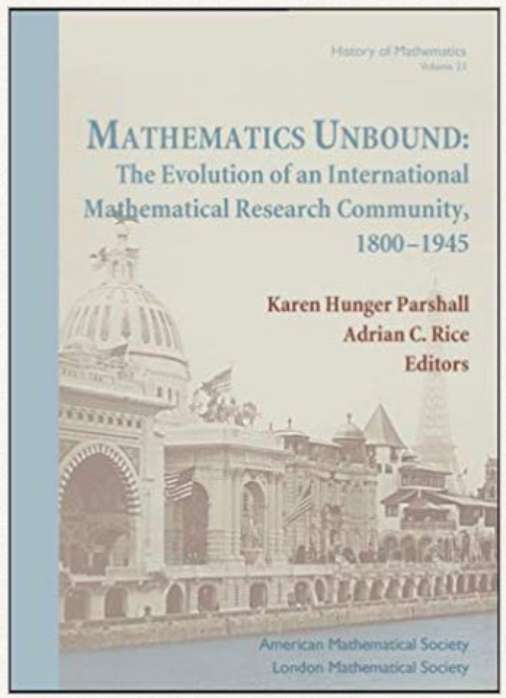




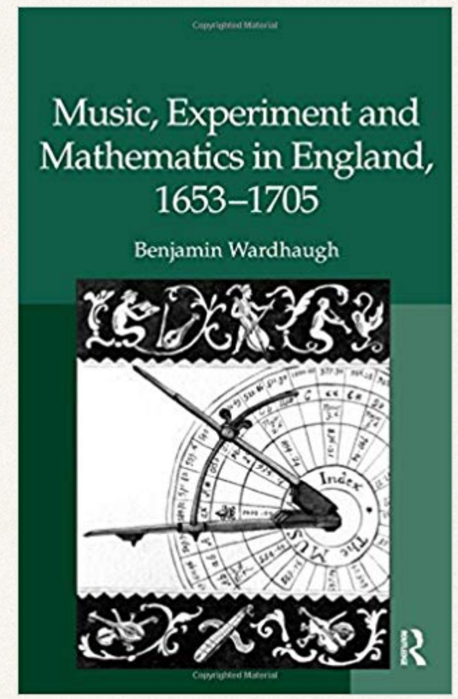
Introduction

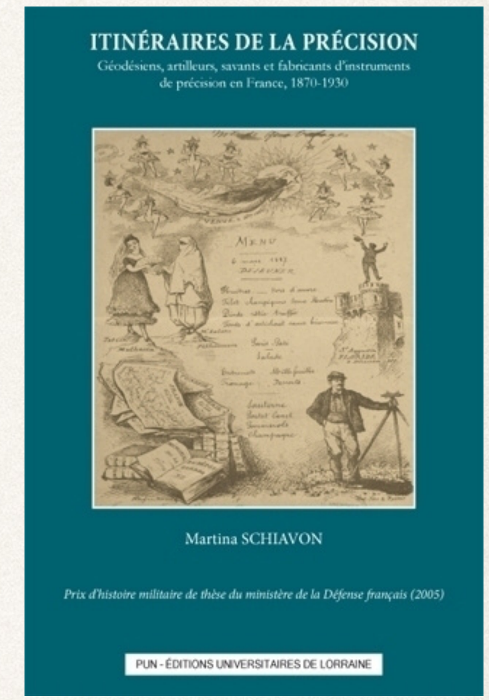
Tendances de l'histoire des mathématiques aujourd'hui

Supports institutionnels, communautés

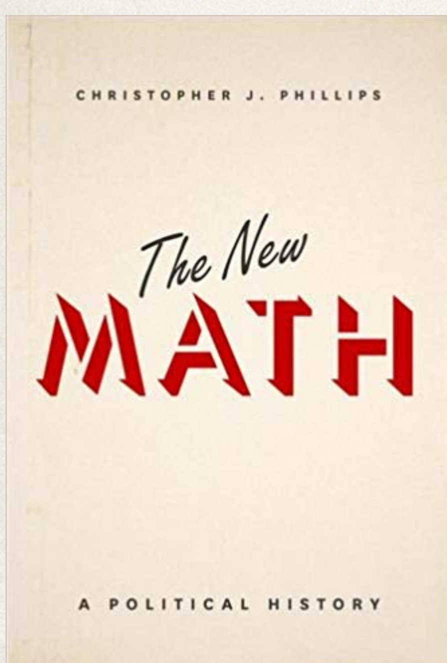


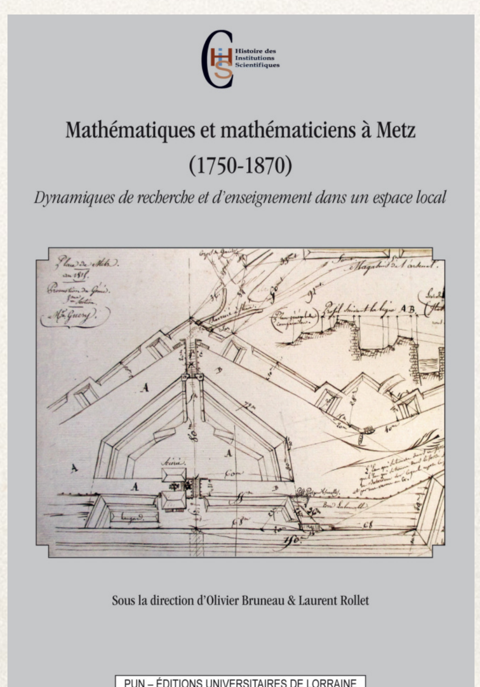
Relations à d'autres domaines



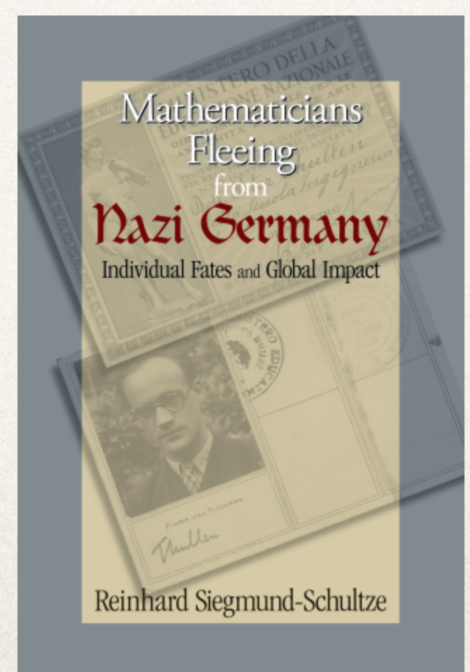


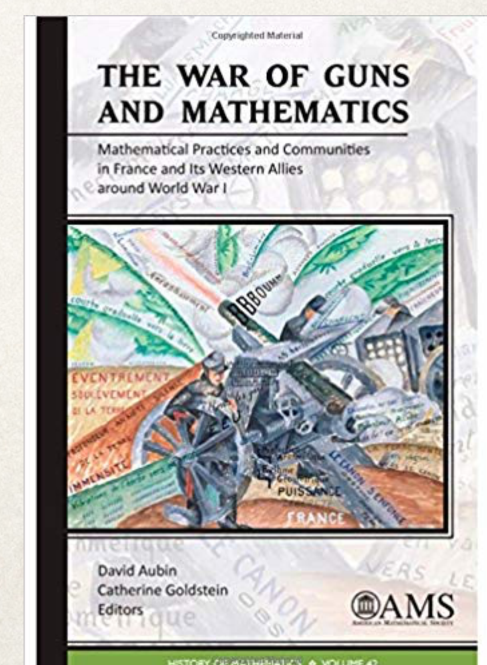
Enseignement





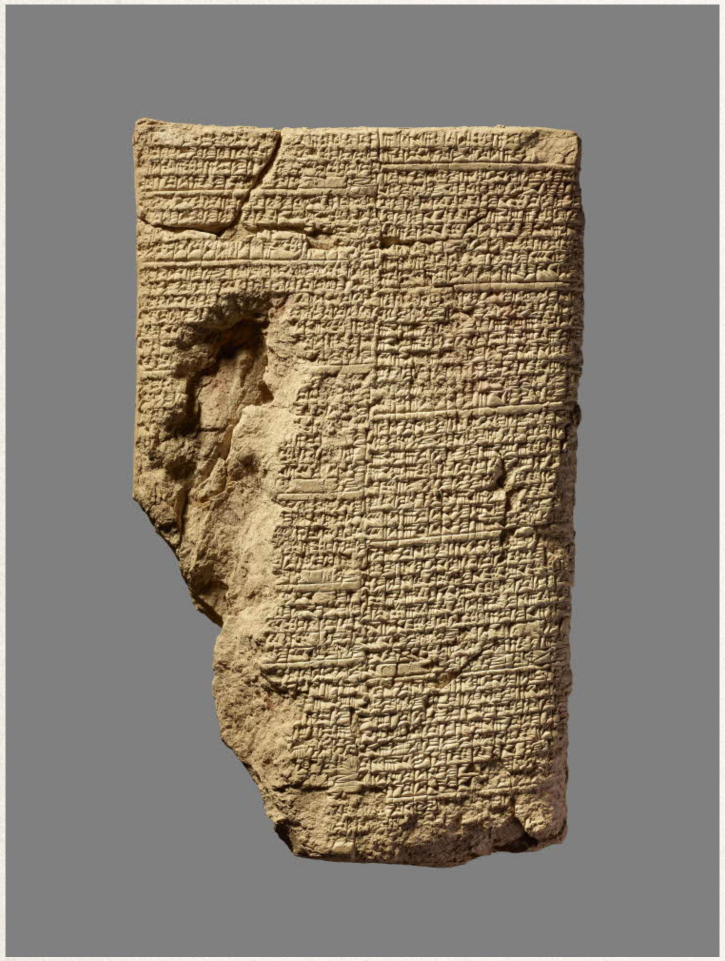
Guerres





Introduction

donner du sens : les aspects "concrets" de l'activité mathématique

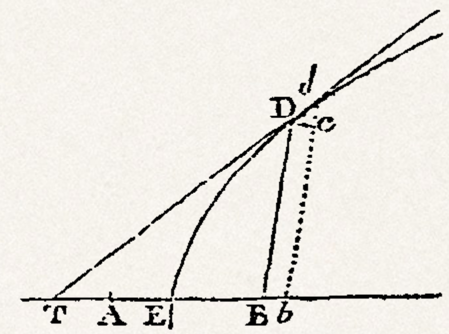


PROB. IV.

To draw Tangents to Curves.

Firſt Manner.

1. Tangents may be variouſly drawn, according to the various Relations of Curves to right Lines. And firſt let BD be a right Line, or Ordinate, in a given Angle to another right Line AB, as a Baſe or Abſciſs, and terminated at the Curve ED. Let this Ordinate move through an indefinitely ſmall Space to the place *bd*, ſo that it may be increaſed by the Moment *cd*, while AB is increaſed by the Moment B*b*, to which D*c* is equal and parallel.



Let D*d* be produced till it meets with AB in T, and this Line will touch the Curve in D or *d*; and the Triangles *dc*D, DBT will be ſimilar. So that it is TB : BD :: D*c* (or B*b*) : *cd*.

2. Since therefore the Relation of BD to AB is exhibited by the

Introduction

donner du sens : les aspects "concrets" de l'activité mathématique

Reciprocarum Cubici ordinis deriuatio.

PROPOSITIO 6.

Æquatio reciproca . . . $aaa - baa + cda = + bcd$. ab originali $\begin{array}{l|} a-b \\ \hline aa+cd \end{array} = aaa - baa + cda - bcd$. posito b. ipsi a. æquali deriuata est.

Nam si ponatur $b = a$. erit $a - b = 0$.

Posito igitur $b = a$. est $\begin{array}{l|} a-b \\ \hline aa+cd \end{array} = 0$.

Est autem ex genesi $\begin{array}{l|} a-b \\ \hline aa+cd \end{array} = aaa - baa + cda - bcd$. quæ est æquatio originalis hic designata.

Ergo . . . $aaa - baa + cda - bcd = 0$.

Ergo . . . $aaa - baa + cda = + bcd$. quæ est æquatio reciproca proposita.

Deriuata est igitur æquatio reciproca proposita ab originali designata, posito b. ipsi a æquali. Vt est enuntiatum.

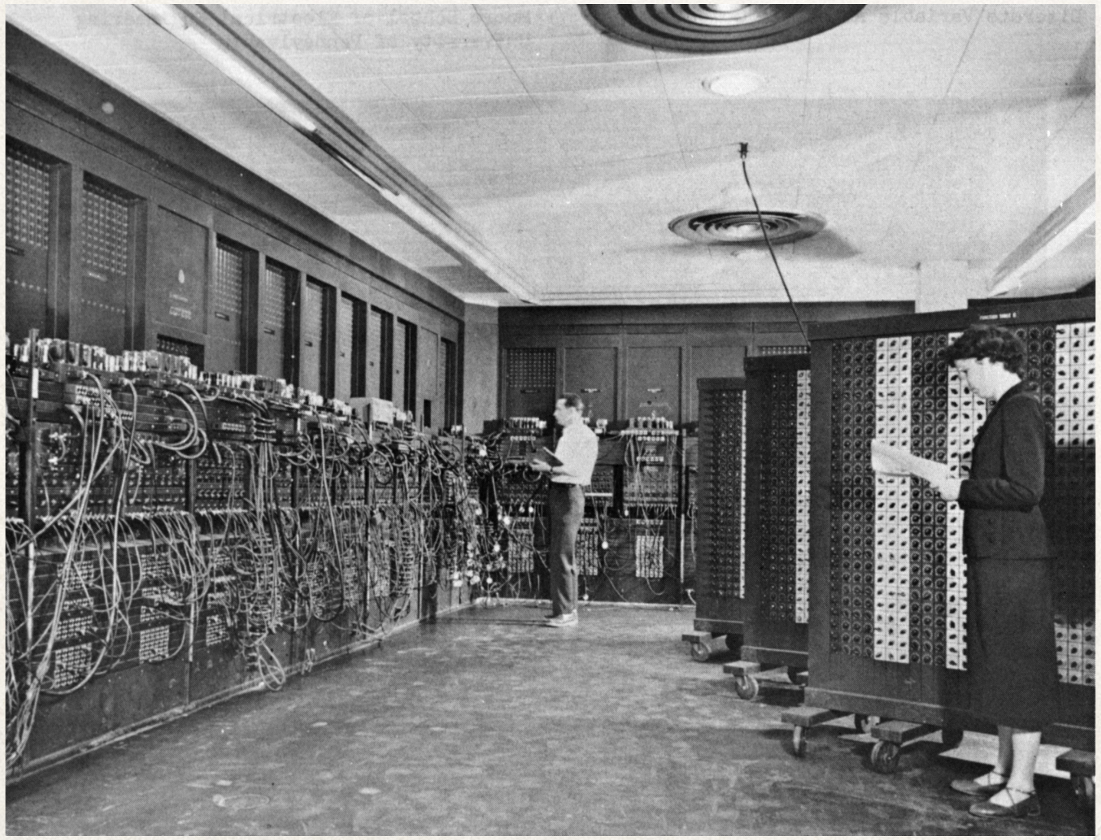
§ 1. POLYNÔMES

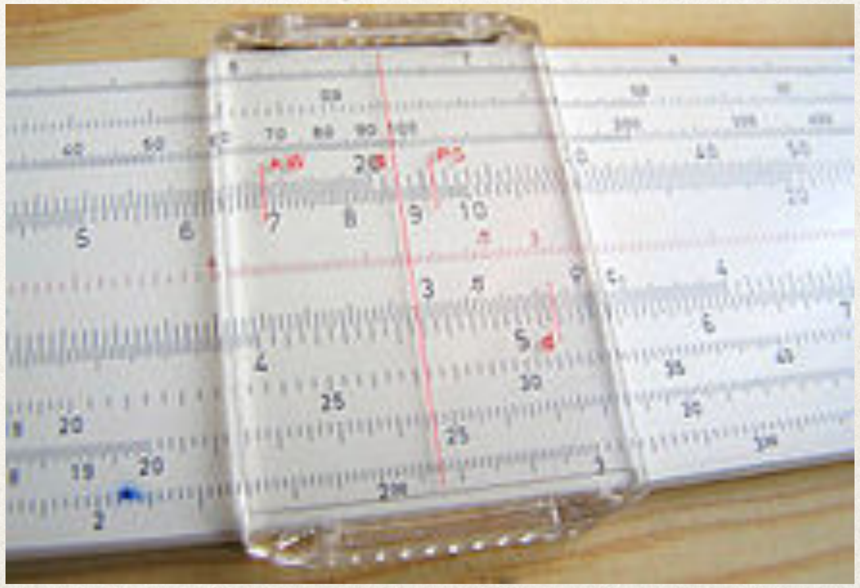
1. Définition des polynômes

Soit I un ensemble. Rappelons (III, p. 25) que l'algèbre commutative libre de I sur A se note $A[(X_i)_{i \in I}]$ ou $A[X_i]_{i \in I}$. Les éléments de cette algèbre sont appelés *polynômes* par rapport aux indéterminées X_i (ou en les indéterminées X_i) à coefficients dans A. Rappelons que l'indéterminée X_i est l'image canonique de i dans l'algèbre commutative libre de I sur A ; il est parfois commode de désigner cette

Introduction

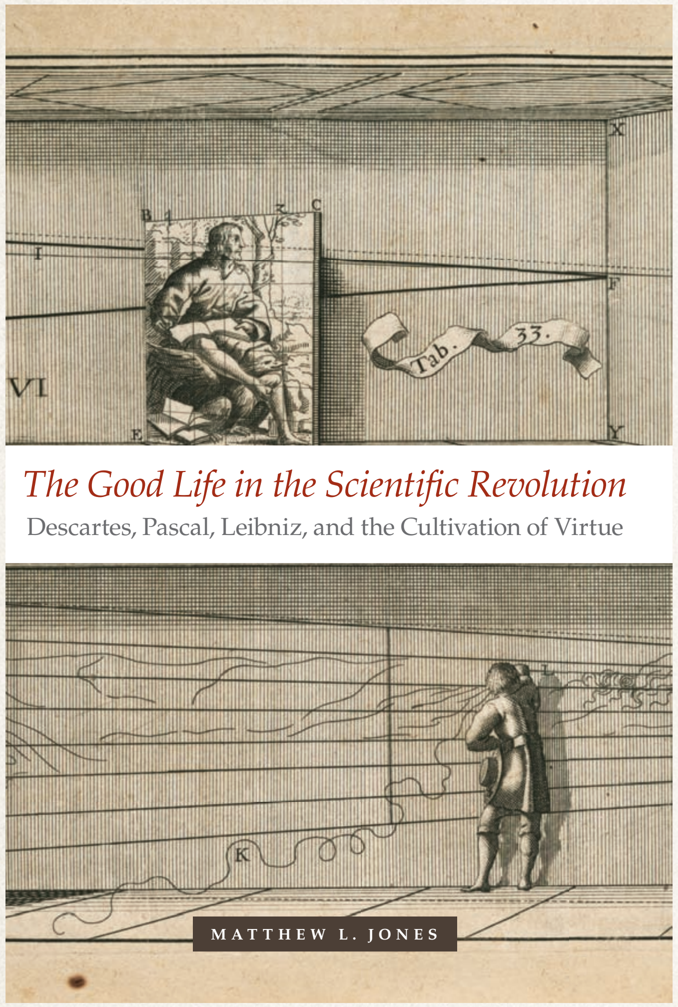
donner du sens : les aspects "concrets" de l'activité mathématique





Introduction

donner du sens : les valeurs associées à la pratique des mathématiques

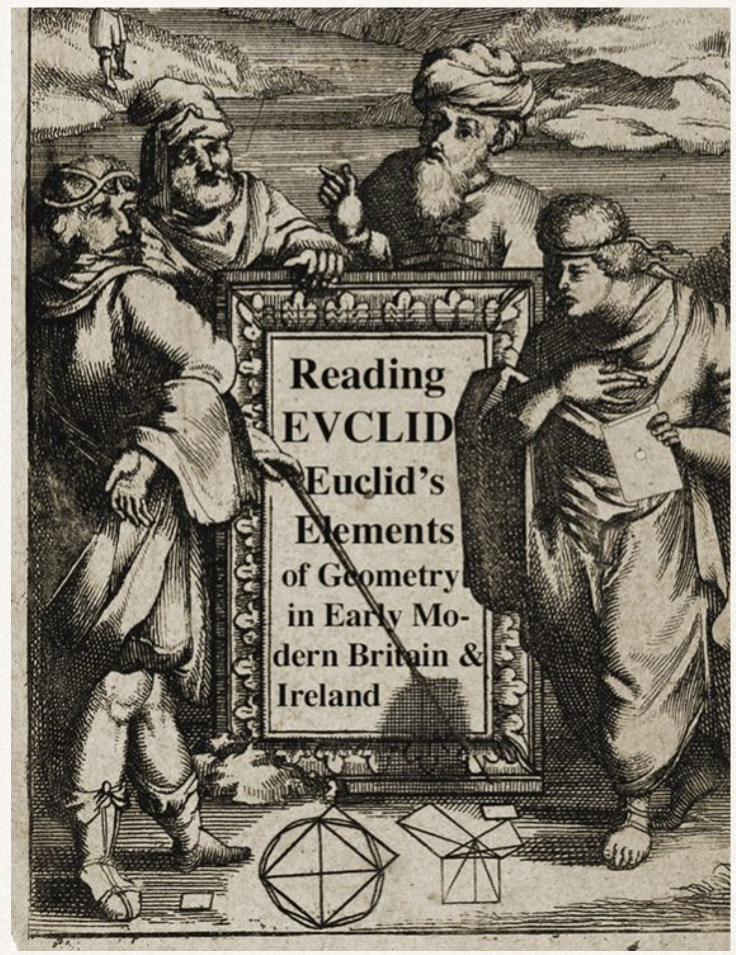


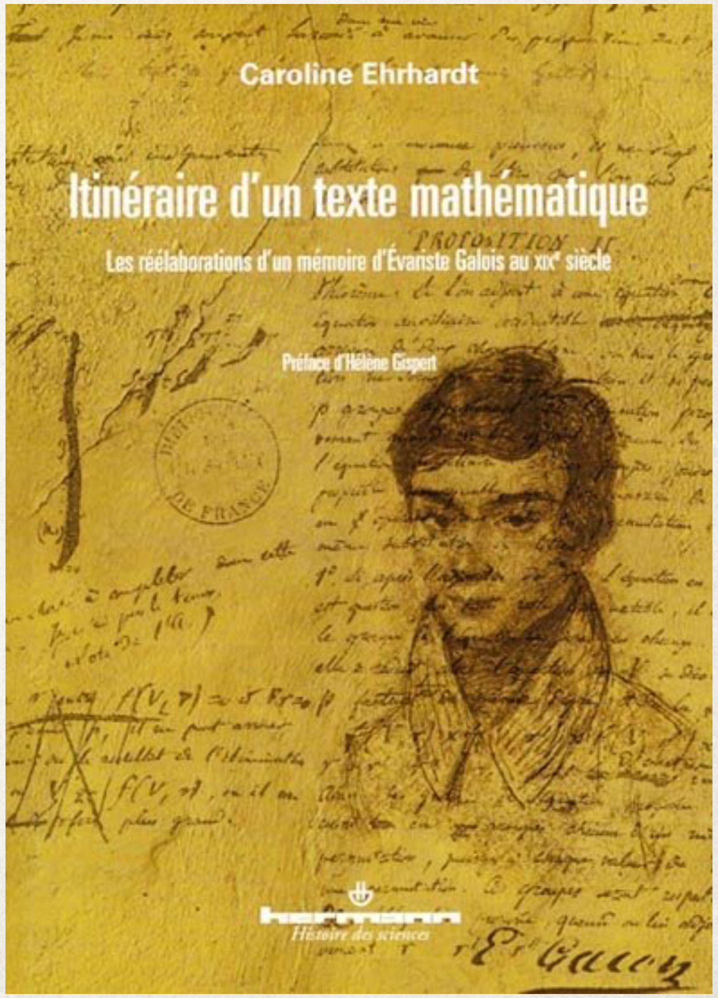
Monsieur Nicolas Bourbaki, Membre Canonique de l'Académie Royale de Poldévie, Grand Maître de l'Ordre des Compacts, Conservateur des Uniformes, Lord Protecteur des Filtres, et Madame, née Biunivoque, ont l'honneur de vous faire part du mariage de leur fille Betti avec Monsieur Hector Pétard, Administrateur-Délégué de la Société des Structures Induites, Membre Diplômé de l'Institute of Class-field Archaeologists, Secrétaire de l'Œuvre du Sou du Lion.

« M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde" (Lettre de Jacobi à Legendre)

Introduction

La question de la longue durée des mathématiques





Between Timelessness and Historiality

On the Dynamics of the Epistemic Objects of Mathematics

*By Moritz Epple**

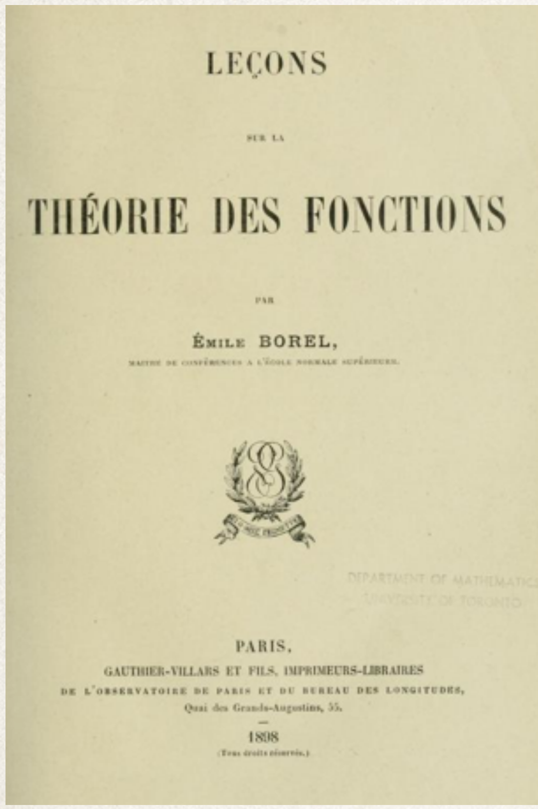
La théorie de la mesure au début du XXe siècle :
travail collectif et entreprise éditoriale

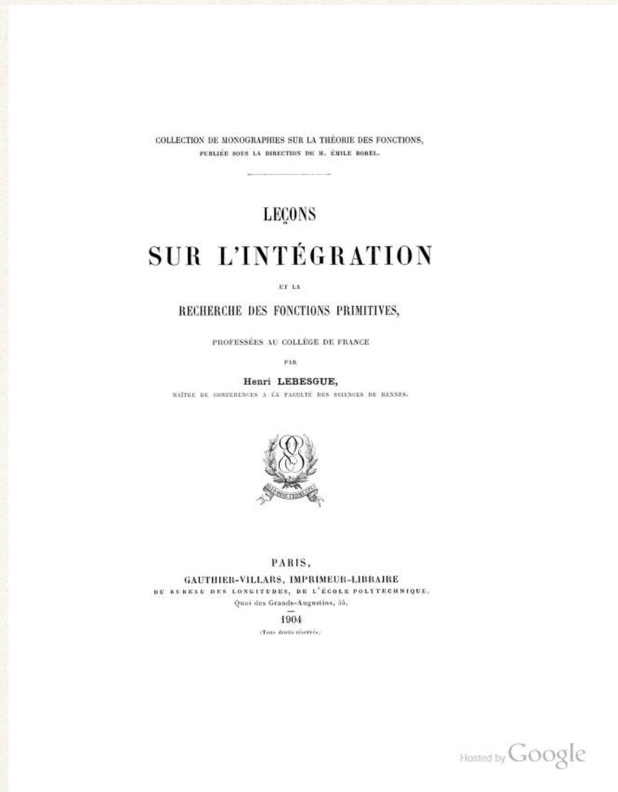
Emile Borel
(1871-1956)

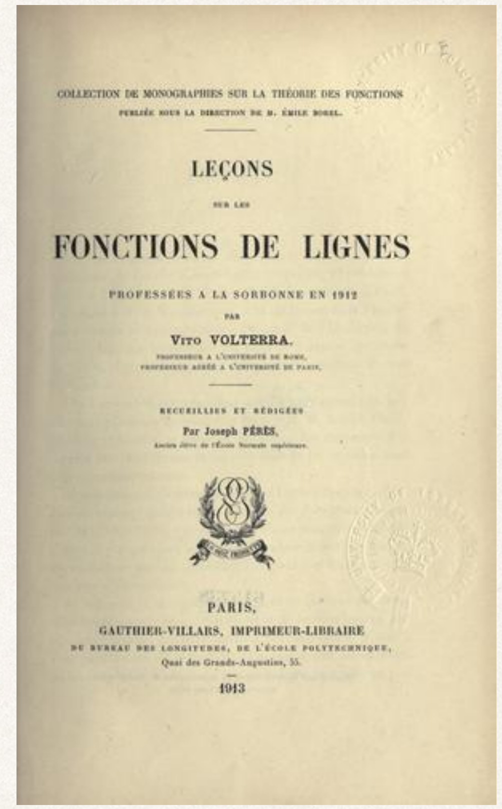
Henri Lebesgue
(1875-1941)

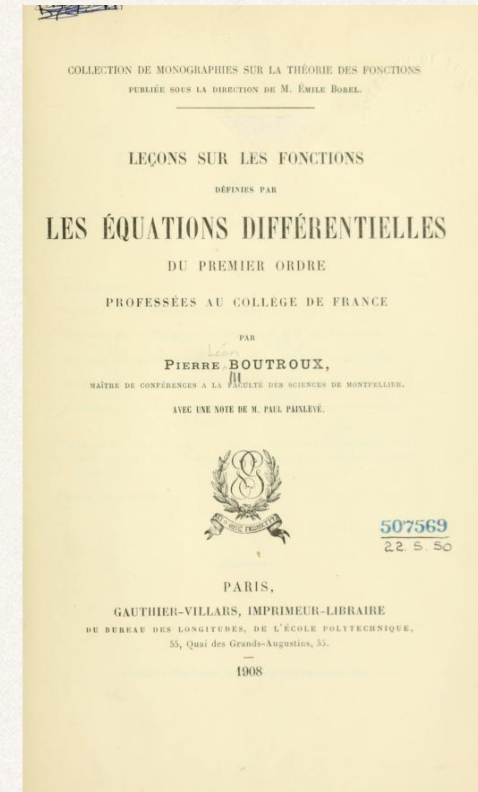
René Baire
(1874-1932)

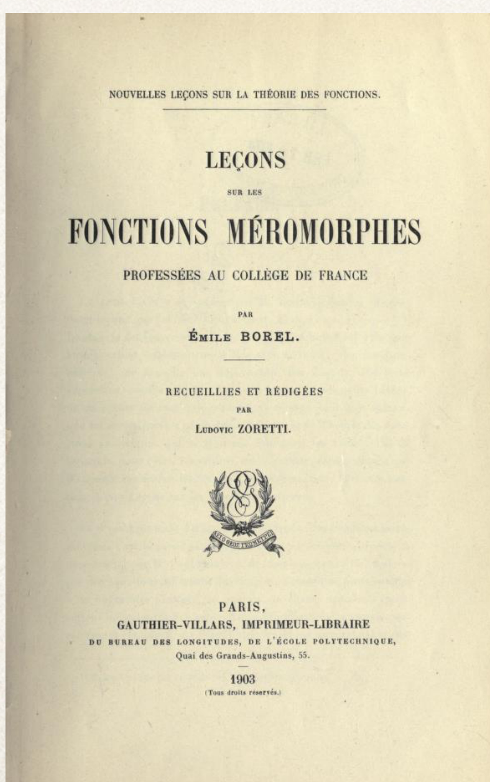
1. Une collection de monographies comme support


LEÇONS
SUR LA
THÉORIE DES FONCTIONS
PAR
ÉMILE BOREL,
MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1898
(Tous droits réservés.)

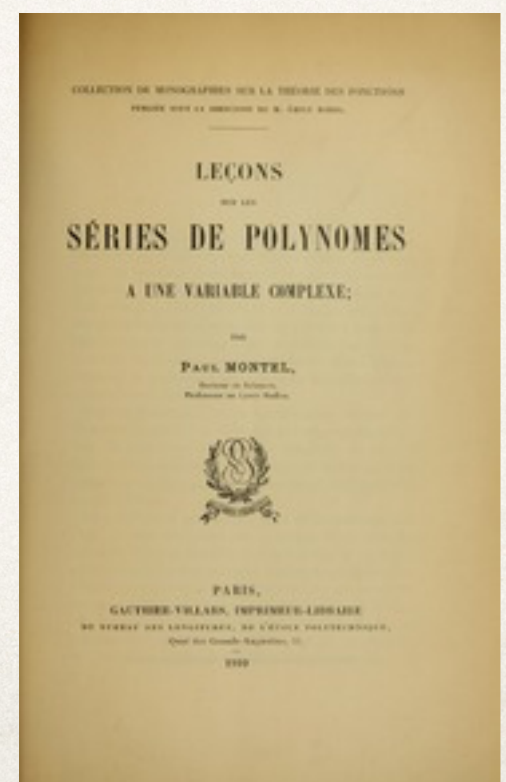

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.
LEÇONS
SUR L'INTÉGRATION
ET LA
RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES,
PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE
PAR
Henri LEBESGUE,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1904
(Tous droits réservés.)


COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.
LEÇONS
SUR LES
FONCTIONS DE LIGNES
PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1912
PAR
VITO VOLTERRA,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE ROME,
PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS,
RECUEILLIES ET RÉDIGÉES
Par Joseph PÉRÈS,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1913

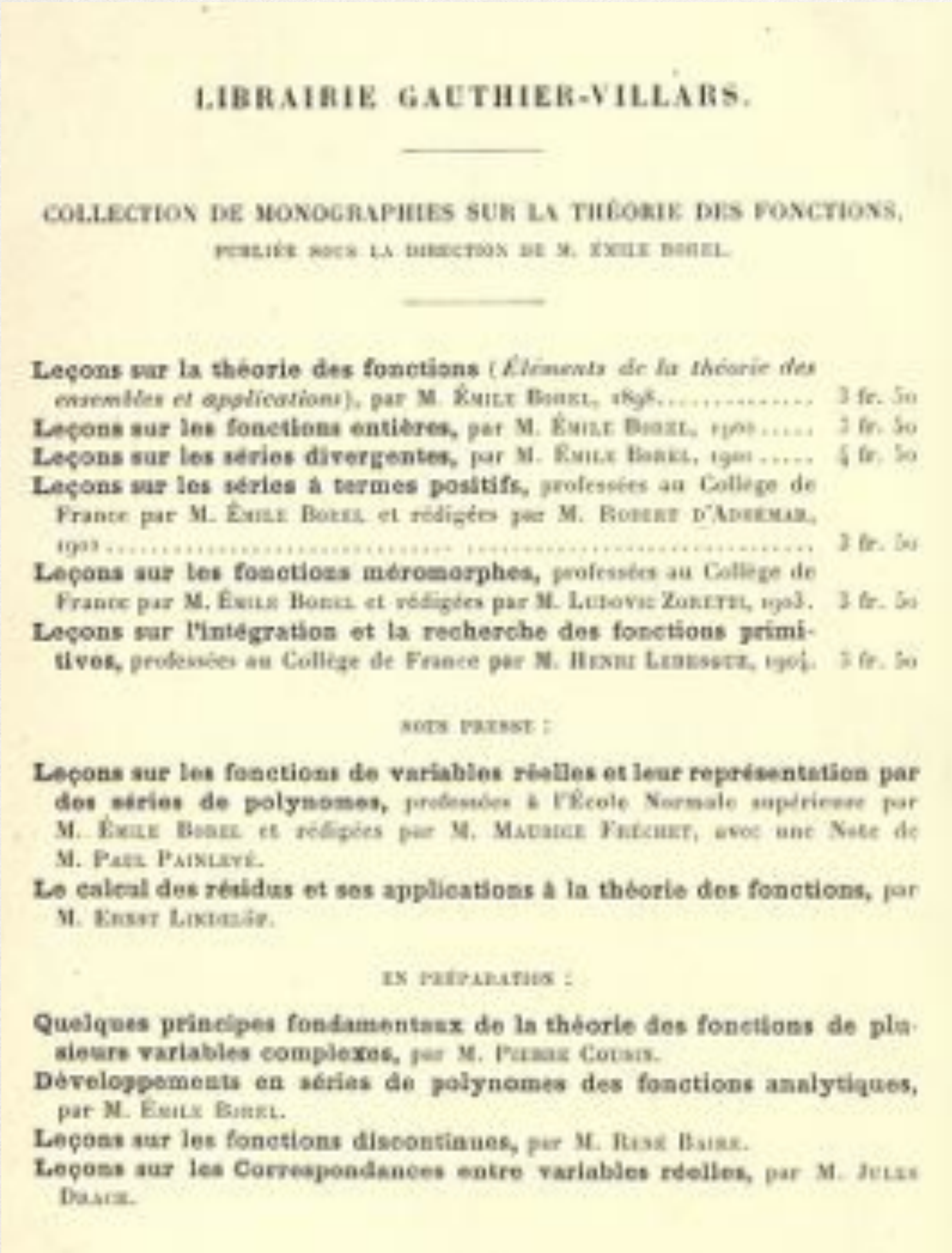

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.
LEÇONS SUR LES FONCTIONS
DÉFINIES PAR
LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
DU PREMIER ORDRE
PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE
PAR
PIERRE BOUTROUX,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.
AVEC UNE NOTE DE M. PAUL PAINLEVÉ.
507569
22.5.50
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.
1908


NOUVELLES LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS.
LEÇONS
SUR LES
FONCTIONS MÉROMORPHES
PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE
PAR
ÉMILE BOREL.
RECUEILLIES ET RÉDIGÉES
PAR
LUDOVIC ZORETTI.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1903
(Tous droits réservés.)


PRINCIPES
DES FONCTIONS ENTIÈRES


LEÇONS
SUR LES
SÉRIES DE POLYNOMES
A UNE VARIABLE COMPLEXE;
PAR
PAUL MONTEL,
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1.a. La promotion d'un domaine de recherche



LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS,
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par M. Émile Borel, 1898 .... 3 fr. 50
Leçons sur les fonctions entières, par M. Émile Borel, 1900 ..... 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes, par M. Émile Borel, 1901 ..... 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par M. Émile Borel et rédigées par M. Robert d'Adhémar, 1902 .... 3 fr. 50
Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par M. Émile Borel et rédigées par M. Ludovic Zoretti, 1903. 3 fr. 50
Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par M. Henri Lebesgue, 1904. 3 fr. 50

SOUS PRESSE :

Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par M. Émile Borel et rédigées par M. Maurice Fréchet, avec une Note de M. Paul Painlevé.
Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. Ernst Lindelöf.

EN PRÉPARATION :

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par M. Pierre Cousin.
Développements en séries de polynomes des fonctions analytiques, par M. Émile Borel.
Leçons sur les fonctions discontinues, par M. René Baire.
Leçons sur les Correspondances entre variables réelles, par M. Jules Drach.

« Quelles sont les autres monographies se rattachant à la théorie des fonctions de plusieurs variables ? Je voudrais savoir pour ne pas empiéter sur des sujets réservés à d'autre. »

Pierre Cousin à Borel, 1903

« J'ai beaucoup songé à ce que vous m'avez écrit. Voici les noms que je vous propose […]. Je suis à votre disposition si vous voulez que je m'occupe de questionner quelqu'un pour savoir s'il serait disposé à écrire l'ouvrage que vous décrivez et de le mettre en rapport avec vous ».
Volterra à Borel, 1904

« Chacun sait que depuis une vingtaine d'années la théorie des fonctions a éprouvé une complète rénovation ». Boutroux, *Leçons sur les fonctions définies par des équations différentielles*, 1908.

1.b. Une approche pédagogique

«[Ce livre s'adresse] à des jeunes gens dont les connaissances en analyse sont généralement peu étendues, mais solides […] Il est dès lors possible, après avoir choisi un sujet bien délimité, d'aller assez vite et d'arriver en peu de leçons à approcher, au moins sur certains points, les limites actuelles de la science. On montre ainsi, sur un exemple particulier tout au moins, quelle est la nature des méthodes employées dans la recherche mathématique et quelle est la forme sous laquelle se posent les problèmes qui restent à résoudre.

Cette conception de l'enseignement me conduit à publier sur la théorie des fonctions une série de petits livres […] seront, en principe, complètement indépendants les uns des autres. […] Mais j'espère que l'ensemble de ces livres pourra néanmoins être considéré comme formant un tout car ils seront écrits dans le même esprit et inspirés par les mêmes idées directrices. »

(É. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, 1900, préface, p. V).

25 des 30 premiers volumes écrits dans un contexte d'enseignement.

Souci de Borel de conserver cet ancrage pédagogique.

« Voici les noms que je vous propose :

M. Ernesto Cesaro de l'université de Naples. Il s'est occupé avec succès de plusieurs sujets d'analyse, de physique mathématique et de géométrie et il est très habile pour écrire des ouvrages didactiques […].

M. Bianchi de l'université de Pise. […] Il a écrit de très bons ouvrages didactiques sur la théorie des surfaces, sur la théorie des fonctions et des fonctions elliptiques etc. […] »

(Volterra à Borel, 5 décembre 1904)

« On ne s'étonnera […] pas de trouver à plusieurs reprises des questions amorcées et non traitées à fond. C'est justement le but de cette collection de fournir aux chercheurs un guide, en les mettant rapidement au courant de l'état d'une question, en précisant la nature des difficultés qui ont jusqu'ici empêché d'aller plus loin, et de leur indiquer en même temps, sans prétendre faire une bibliographie complète, les premiers ouvrages qu'ils auront à consulter. »

(Préface du livre de L. Zoretti)

« J'ai supprimé au moins 11 pages […]. je serai donc bien dans les limites assignées par Gauthier-Villars[…]. Je n'écrirai pas de note II; j'expliquerai en 4 ou 5 lignes ce que j'y aurais dit et renverrai à ma thèse. Quant à ce que j'y aurais mis de nouveau, je le publierai ailleurs »

(Lebesgue à Borel, 23 octobre 1904)

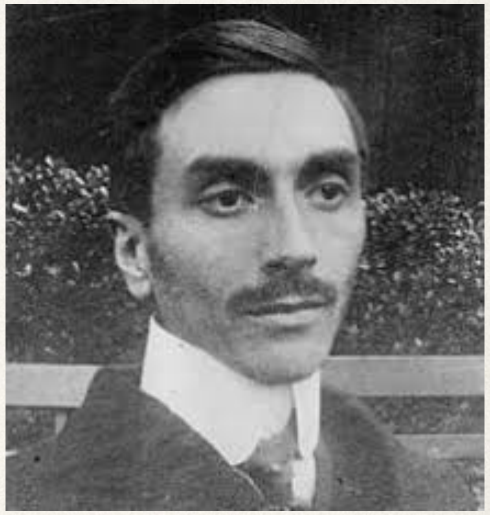
2. Un travail collectif

Emile Borel
(1871-1956)

Henri Lebesgue
(1875-1941)

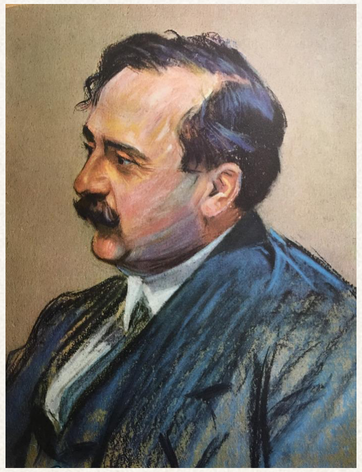
René Baire
(1874-1932)

Ernst Lindelöf
(1870-1946)



Pierre Boutroux
(1880-1922)

Otto Blumenthal
(1876-1944)



Paul Montel
(1876-1975)

Ludovic Zoretti
(1880-1948)

Vito Volterra
(1860-1940)

Dienes
La Vallée Poussin
Bôcher
Giraud
Levy

2. a. Mobiliser des auteurs

Par le biais de l’enseignement: l'Ecole normale supérieure

- Borel est MCF à l’ENS à partir de 1903, puis directeur des études scientifiques à partir de 1910.

- sollicitation d’anciens élèves de l’ENS comme auteurs ou d’élèves de l’ENS comme rédacteurs

Lebesgue, Baire, Julia, Zoretti, Montel, Denjoy, Fréchet, Giraud (auteurs)
Pérès, Flamant, Dubesset, Dauzats (rédacteurs)
Drach, Cousin (projets non aboutis)
Painlevé, Hadamard (contributeurs)

Relations internationales

- **Voyages de professeurs étrangers qui viennent enseigner à Paris:**

Volterra, de la Vallée Poussin, Bôcher, Bernstein, Luzin, Stoilow.

« Lors de mon séjour à Paris vous avez bien voulu me proposer d'écrire un petit livre dans votre collection de monographies » (Lettre de Norlund, 1912)

- **Réputation de Borel, congrès**

« C'est au troisième congrès international des mathématiciens, à Heidelberg, en automne 1904, que M. Borel m'avait proposé de rédiger pour sa collection un volume sur les fonctions entières d'ordre infini » Préface du livre de Blumenthal

« J'admire tout ce que vous avez fait pour le progrès des mathématiques par votre œuvre personnelle et par l'impulsion que vous avez donnée aux autres. Votre collection de monographie a été très utile pour répandre des nouvelles idées. Votre nouvelle proposition fait ainsi beaucoup d'honneur aux mathématiciens de notre pays et vous pouvez compter sur moi ». Volterra à Borel, 1904

2. b. Dialogues et débats

Relecture et travail éditorial

Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*: 4 mois d'échanges avec Borel

Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*: 5 mois de rédaction, 2 mois ½ de corrections

> Je vous remercie beaucoup d'avoir bien voulu les annoter, et je me conforme de mon mieux à vos conseils. Je modifie en particulier ma notation […] qui prêtait à confusion. Je précise aussi la distinction établie entre les coupures-lignes de croisement que l'on franchit pour passer d'un feuillet à un autre, et les coupures-fentes que l'on s'interdit de franchir […].
>
> Boutroux à Borel, octobre 1907

Arbitrages et cohérence de la collection

[…] peut-être certains […] clients cesseront d'acheter les livres s'ils doivent en acheter plusieurs à la fois » Lebesgue à Borel, 1905

Je ne vois aucun inconvénient à ce que vous communiquiez ma note à M. Lindelöf. Vous me donnerez les renseignements nécessaires pour indiquer en note le travail de Lindelöf. La méthode est, autant que je l'ai comprise, exactement celle que j'emploie » Lebesgue à Borel, 1903

Les questions traitées dans mon ouvrage appartiennent à la théorie récente dont MM. Borel, Baire et Lebesgue sont les fondateurs
La Vallée Poussin, « Préface », 1916

2. La cohérence éditoriale comme gage de succès

« la collection de monographies ne me paraît pas le moyen certain de faire fortune » Lebesgue,1909

Des ventes modestes

Lebesgue, *Intégration* :
77 exemplaires en 1908
96 exemplaires en 1909

Lebesgue, *Séries trigonométriques:*
89 exemplaires en 1907
73 exemplaires en 1908
75 exemplaires en 1909

Mais des rééditions tout de même

3. a. La rédaction comme formation à la recherche

- **Un lien étroit entre recherche et apprentissage.**

Volterra, à propos de la rédaction de Pérès: « et même s'il y trouve d'autres inexactitudes ou d'autres corrections à faire, je lui serai fort reconnaissant » (1911).

Julia, à propos de la rédaction d'un livre de Borel: « La rédaction du livre sur les fonctions monogènes uniformes est terminée. Je la porterai chez M. Gauthier-Villars dès que vous m'aurez dit ce que vous pensez de l'idée suivante […] » (1917)

Lebesgue, à propos de la thèse du rédacteur du livre de Baire (Denjoy): « comme vous me le disiez, il nage dans le Baire comme dans son élément naturel » (10 décembre 1904)

- **Des rédacteurs qui deviennent plus tard des auteurs.**

3. b. Livres et journaux: effets de résonance

Des articles dans des revues mathématiques, comme complément des livres

Baire, « Sur la représentation des fonctions discontinues », *Acta Mathematica* (1906)

Lebesgue, « Sur les fonctions représentables analytiquement », *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1905)

Recensions dans des revues mathématiques, mais aussi dans des revues destinés aux étudiants et enseignants.

Bulletin des sciences mathématiques
Revue générale des sciences pures et appliquées
Nouvelles annales de mathématiques
Mathesis
L'Enseignement mathématique
Mathematical Gazette.

IV. c. Un succès lié aux choix éditoriaux

Le succès des livres de Borel

« Il me semble que Gauthier-Villars a raison ; il est certain que vos livres se sont fait une clientèle qui devient celle de la collection de monographies etc. »
Lebesgue à Borel, 29 janvier 1905

« Thank you very much […] for your permission to translate and publish your excellent book Leçons sur la théorie des fonctions in the English language »
Schwott (Univ. Pennsylvanie) à Borel, 20 août 1903

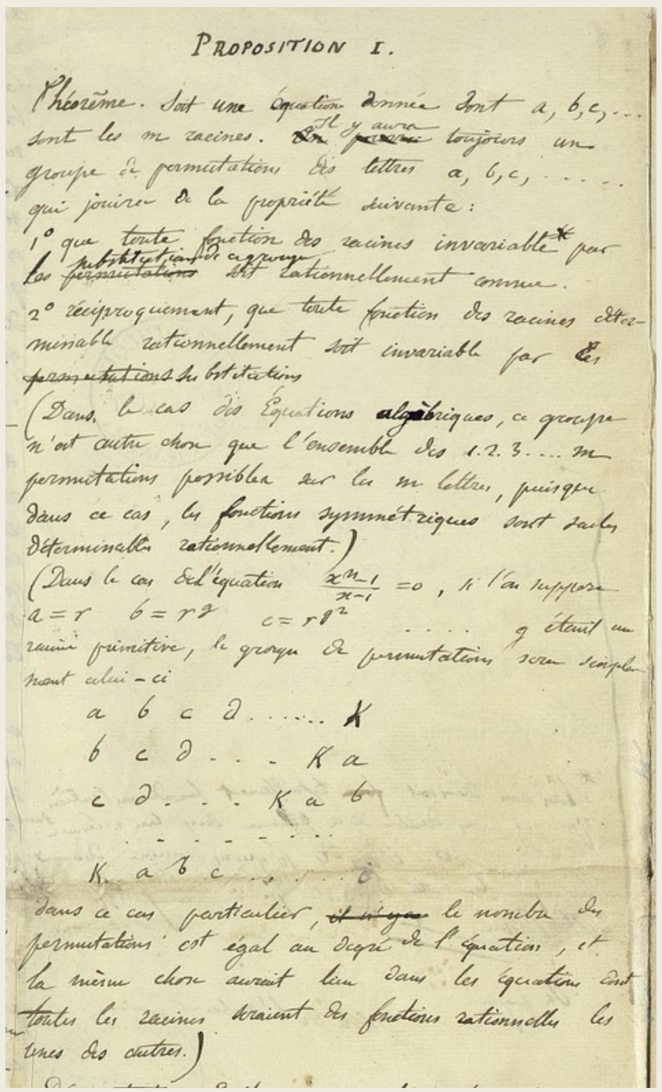
« The earlier volume of lectures which you have published are widely read end digitently studied by our best students in Cambridge : and I know that your books have proved a valuable source both of knowledge and of stimulus. »
Forsyth à Borel, 11 novembre 1904

La possibilité d'un enseignement différé:

"c'est le livre de Lebesgue sur les séries trigonométriques, dans la collection Borel, qui a attiré mon attention sur sa notion d'intégrale" (F. Riesz, auteur d'un livre en 1913)

La théorie de Galois (1850-1900)
le temps long de la sédimentation des savoirs

- Cela n'a rien d'évident de voir une théorie dans les textes de Galois qui nous sont parvenus.
- La familiarité vient du fait que ces textes ont conservé une actualité parce qu'ils ont été retravaillés par d'autres que Galois.
- Comprendre comment le travail mené par différents mathématiciens au fil du temps à pu aboutir à la constitution de « la théorie de Galois ».



PROPOSITION I.

Théorème. Soit une équation donnée dont a, b, c, ... sont les m racines. ~~On pourra~~ Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, ... qui jouira de la propriété suivante :

1° que toute fonction des racines invariable* par les ~~permutations~~ substitutions de ce groupe soit rationnellement connue.

2° réciproquement, que toute fonction des racines déterminable rationnellement soit invariable par les permutations de substitutions

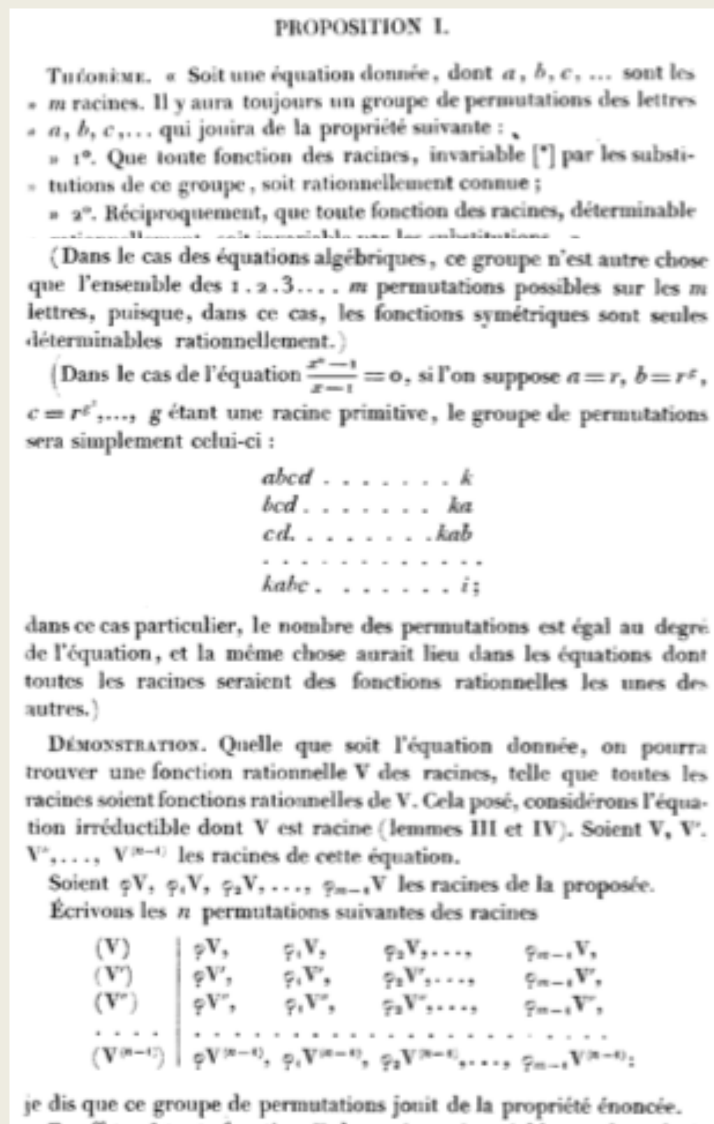
(Dans le cas des Équations algébriques, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble des 1.2.3.... m permutations possibles sur les m lettres, puisque dans ce cas, les fonctions symétriques sont seules déterminables rationnellement.)

(Dans le cas de l'équation $\frac{x^m-1}{x-1}=0$, si l'on suppose $a=r$ $b=r^g$ $c=r^{g^2}$ .... g étant une racine primitive, le groupe de permutations sera simplement celui-ci

a b c d ..... k
b c d . . . k a
c d . . . k a b
. . . .
k a b c . . . i

dans ce cas particulier, ~~et le~~ le nombre des permutations est égal au degré de l'équation, et la même chose aurait lieu dans les équations dont toutes les racines seraient des fonctions rationnelles les unes des autres.)

Manuscrit de Galois
(Bibl. Institut)



PROPOSITION I.

THÉORÈME. « Soit une équation donnée, dont $a, b, c, \ldots$ sont les « m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres « $a, b, c, \ldots$ qui jouira de la propriété suivante :

» 1°. Que toute fonction des racines, invariable [*] par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;

» 2°. Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable

(Dans le cas des équations algébriques, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble des $1.2.3\ldots.m$ permutations possibles sur les m lettres, puisque, dans ce cas, les fonctions symétriques sont seules déterminables rationnellement.)

(Dans le cas de l'équation $\frac{x^n-1}{x-1}=0$, si l'on suppose $a=r$, $b=r^g$, $c=r^{g^2}$,..., g étant une racine primitive, le groupe de permutations sera simplement celui-ci :

$abcd$ . . . . k
bcd . . . . ka
cd. . . . . kab
. . . .
$kabc$ . . . . i;

dans ce cas particulier, le nombre des permutations est égal au degré de l'équation, et la même chose aurait lieu dans les équations dont toutes les racines seraient des fonctions rationnelles les unes des autres.)

DÉMONSTRATION. Quelle que soit l'équation donnée, on pourra trouver une fonction rationnelle V des racines, telle que toutes les racines soient fonctions rationnelles de V. Cela posé, considérons l'équation irréductible dont V est racine (lemmes III et IV). Soient V, V', V'',..., $V^{(n-1)}$ les racines de cette équation.

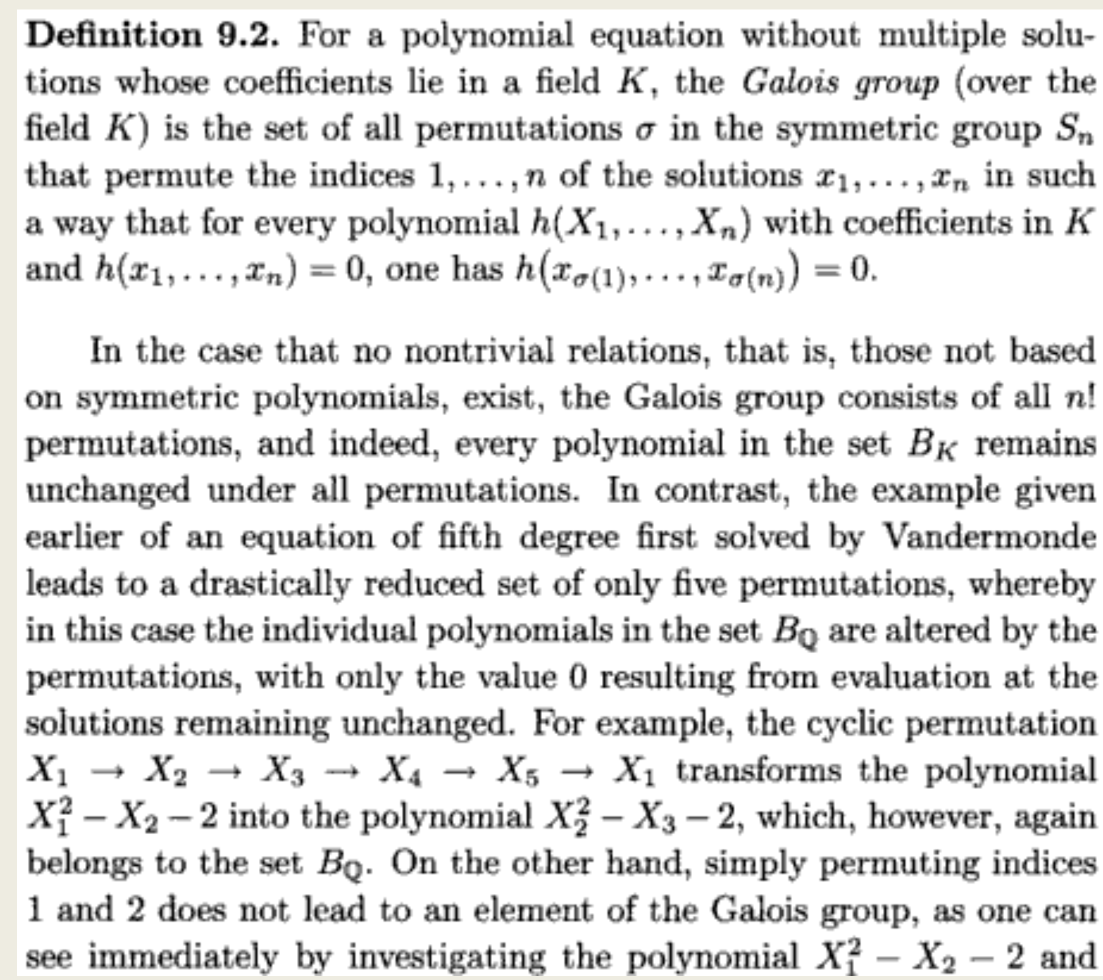
Soient $\varphi V, \varphi_1 V, \varphi_2 V, \ldots, \varphi_{n-1} V$ les racines de la proposée.

Écrivons les n permutations suivantes des racines

$$\begin{array}{l|llll}
(V) & \varphi V, & \varphi_1 V, & \varphi_2 V, \ldots, & \varphi_{n-1} V, \\
(V') & \varphi V', & \varphi_1 V', & \varphi_2 V', \ldots, & \varphi_{n-1} V', \\
(V'') & \varphi V'', & \varphi_1 V'', & \varphi_2 V'', \ldots, & \varphi_{n-1} V'', \\
\ldots & \ldots & & & \\
(V^{(n-1)}) & \varphi V^{(n-1)}, & \varphi_1 V^{(n-1)}, & \varphi_2 V^{(n-1)}, \ldots, & \varphi_{n-1} V^{(n-1)};
\end{array}$$

je dis que ce groupe de permutations jouit de la propriété énoncée.

Journal de Liouville



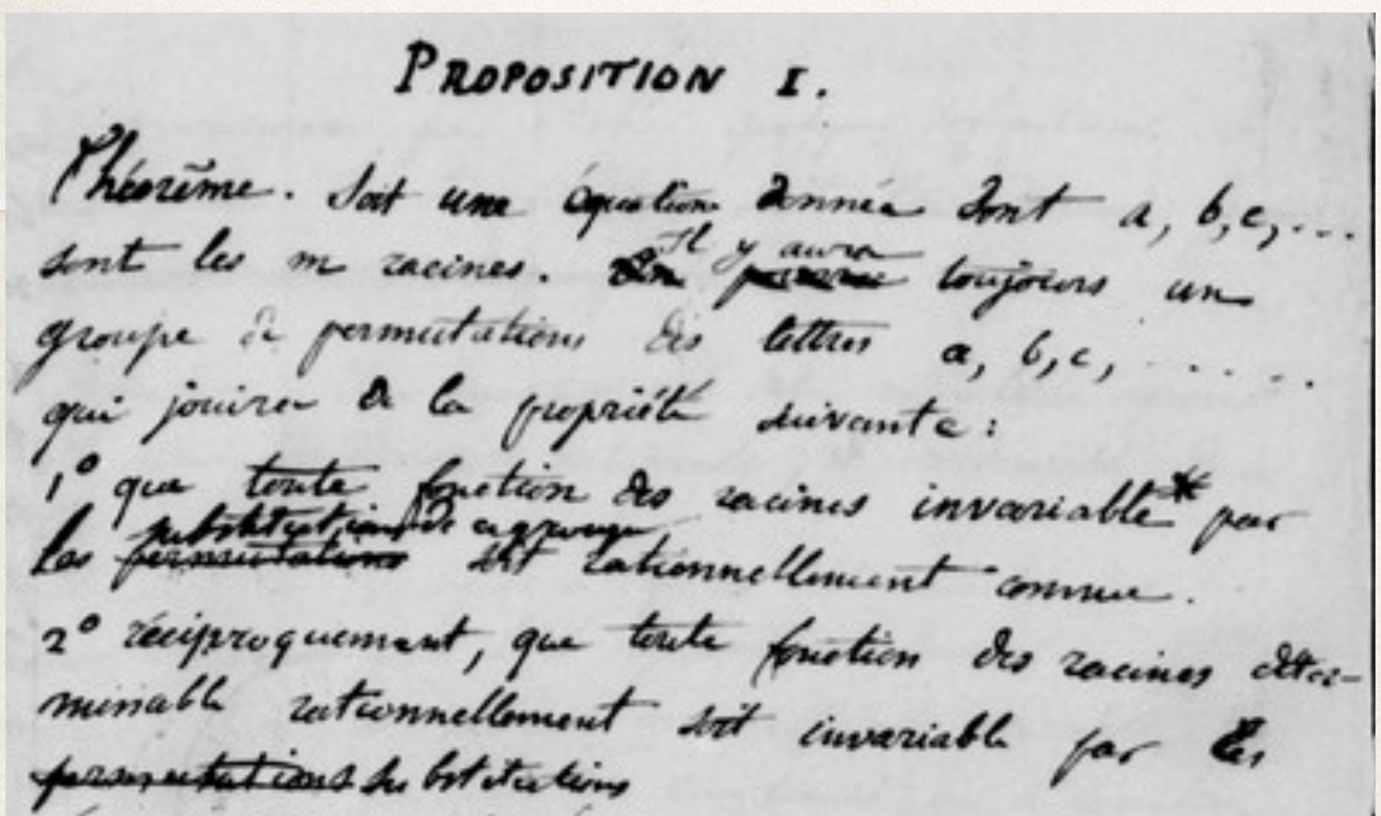
Definition 9.2. For a polynomial equation without multiple solutions whose coefficients lie in a field K, the *Galois group* (over the field K) is the set of all permutations σ in the symmetric group S_n that permute the indices $1, \ldots, n$ of the solutions $x_1, \ldots, x_n$ in such a way that for every polynomial $h(X_1, \ldots, X_n)$ with coefficients in K and $h(x_1, \ldots, x_n) = 0$, one has $h(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = 0$.

In the case that no nontrivial relations, that is, those not based on symmetric polynomials, exist, the Galois group consists of all $n!$ permutations, and indeed, every polynomial in the set B_K remains unchanged under all permutations. In contrast, the example given earlier of an equation of fifth degree first solved by Vandermonde leads to a drastically reduced set of only five permutations, whereby in this case the individual polynomials in the set $B_{\mathbb{Q}}$ are altered by the permutations, with only the value 0 resulting from evaluation at the solutions remaining unchanged. For example, the cyclic permutation $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to X_5 \to X_1$ transforms the polynomial $X_1^2 - X_2 - 2$ into the polynomial $X_2^2 - X_3 - 2$, which, however, again belongs to the set $B_{\mathbb{Q}}$. On the other hand, simply permuting indices 1 and 2 does not lead to an element of the Galois group, as one can see immediately by investigating the polynomial $X_1^2 - X_2 - 2$ and

Galois theory for beginners, Bewersdorff

1. Un bref aperçu du *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1831)

Objectif: résolution algébrique des équations
"Background" : travaux de Lagrange
Principes: Adjonction, Substitutions
Etapes:
Association d'un groupe (tableau et lettre) à l'équation
Décomposition du groupe
CNS résolubilité
"application"

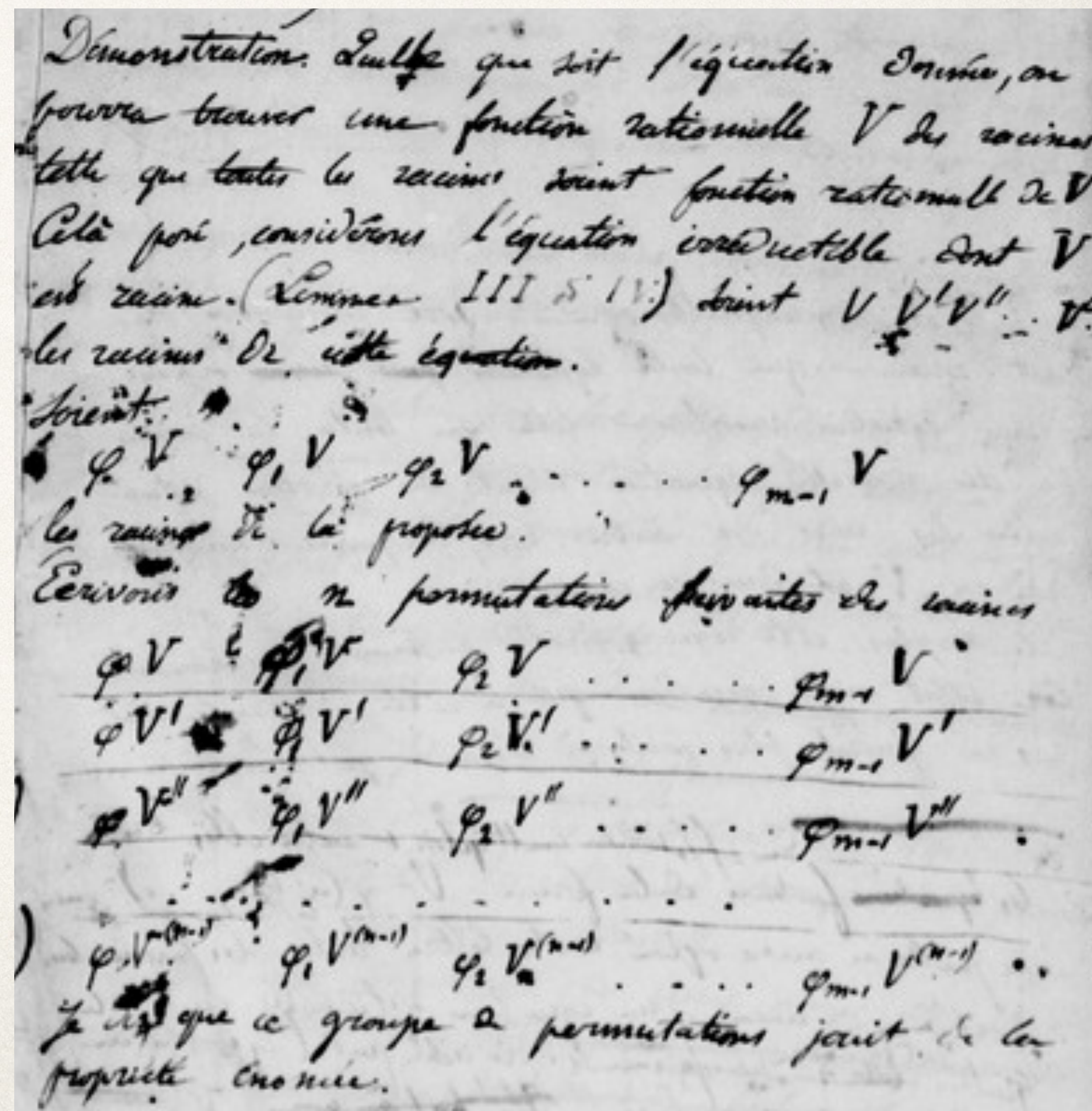


PROPOSITION I.

Théorème. Soit une équation donnée dont $a, b, c, \ldots$ sont les m racines. ~~On pourra~~ Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres $a, b, c, \ldots$ qui jouira de la propriété suivante :

1° que toute fonction des racines invariable* par les ~~permutations~~ substitutions de ce groupe soit rationnellement connue.

2° réciproquement, que toute fonction des racines déterminable rationnellement soit invariable par les ~~permutations~~ substitutions



Démonstration. Quelle que soit l'équation donnée, on pourra trouver une fonction rationnelle V des racines telle que toutes les racines soient fonction rationnelle de V. Cela posé, considérons l'équation irréductible dont V est racine. (Lemmes III & IV.) Soient $V, V', V'', \ldots V^{(n-1)}$ les racines de cette équation.

Soient $\varphi V, \varphi_1 V, \varphi_2 V, \ldots \varphi_{m-1} V$ les racines de la proposée.

Écrivons les n permutations suivantes des racines

$$\begin{array}{lllll} \varphi V & \varphi_1 V & \varphi_2 V & \ldots & \varphi_{m-1} V \\ \varphi V' & \varphi_1 V' & \varphi_2 V' & \ldots & \varphi_{m-1} V' \\ \varphi V'' & \varphi_1 V'' & \varphi_2 V'' & \ldots & \varphi_{m-1} V'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi V^{(n-1)} & \varphi_1 V^{(n-1)} & \varphi_2 V^{(n-1)} & \ldots & \varphi_{m-1} V^{(n-1)} \end{array}$$

Je dis que ce groupe de permutations jouit de la propriété énoncée.

2. Quelques unes des premières relectures de ce mémoire

2. a. Arthur Cayley, 1854

[1] The idea of a group as applied to permutations or substitutions is due to Galois, and the introduction of it may be considered as marking an epoch in the progress of the theory of algebraical equations.

"A set of symbol, 1, α, β, …
all of them different, and such as the product of any two of them (no matter in what order), or the product of anyone of them into himself, belongs to the set is said to be a group. It follows that if […] the symbols of the group are multiplied together so as to form a table, thus:

Nearer factors \ Further factors	1	α	β	..
1	1	α	β	..
α	α	α^2	$\beta\alpha$	
β	β	$\alpha\beta$	β^2	
	:			

that as well each line as each column of the square will contain all the symbols 1, α, β,..".

Objectif: points communs entre des situations différentes (généricité)
"Background" : école algébrique anglaise
Principes: définition, listes et tables
Etapes:
décomposition
groupes d'ordre 4, 6 etc.

2. b. Richard Dedekind, séminaire à Göttingen (1856-1858)

Notion de groupe:
Un ensemble G de g substitutions distinctes est un groupe de degré g si tout produit arbitraire de substitutions contenues dans G est encore contenu dans G

« Proposition II » de Galois selon Dedekind:
Lorsqu'on adjoint une quantité ϱ à un domaine (*Gebiet*) S, correspondant à un groupe G pour l'équation, on est amené à définir un nouveau groupe K pour l'équation, qui est un sous-groupe (*Divisor*) de G, et qui est relatif à un nouveau domaine S' contenant « toutes les grandeurs rationnellement exprimables à l'aide de S et de ϱ

Proposition II dans le mémoire de Galois
Lorsqu'on adjoint à une équation donnée la racine d'une équation auxiliaire, il arrivera de deux choses l'une: ou bien le groupe de l'équation ne sera pas changé, ou bien il se partagera en p groupes appartenant chacun à l'équation proposée respectivement quand on lui adjoint chacune des racines de l'équation auxiliaire

Objectif: résolution algébrique des équations
"Background" : travaux de Galois + théorie des nombres
Principes: Adjonction, (groupes abstraits, lettre)
Etapes:
(Association d'un groupe à l'équation)
Décomposition du groupe (CNS résolubilité)
~~"application"~~

2. c. Joseph-Alfred Serret, *Cours d'algèbre supérieure* (1849, 1854, 1866)

Une « théorie de Galois » pour les étudiants

Affirmation de la présence de Galois dans une tradition « classique »:

- Les recherches de Galois relèvent de la théorie des équations.
- Dimension pratique.

Traduction dans un autre cadre théorique:

les systèmes de substitutions conjuguées (Cauchy)

Objectif: résolution algébrique des équations

applicabilité

"Background" : travaux de Lagrange et de Cauchy

Principes: (Adjonction), substitutions, systèmes de substitutions conjuguées

Etapes:

Association d'un groupe à l'équation

Décomposition du groupe

(CNS résolubilité)

"application"

Un exemple: le lemme II

Lemme II. Étant donnée une équation quelconque, qui n'a pas de racines égales, dont les racines sont $a, b, c\ldots$ on peut toujours former une fonction V des racines, telle qu'aucune des valeurs que l'on obtient en permutant dans cette fonction les racines de toutes manières, ne soient égales.

Par exemple, on peut prendre

$$V = Aa + Bb + Cc + \ldots$$

$A, B, C, \ldots$ étant des nombres entiers convenablement choisis.

Recherches de Galois relatives à la théorie précédente.

502. L'analyse que nous venons de présenter nous a conduit à un théorème dont on comprend toute l'importance et que l'on peut énoncer comme il suit :

THÉORÈME. — *Si*

(1) $$f(x) = 0$$

est une équation quelconque de degré n, mais qui n'a pas de racines égales, et que

$$V = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

soit une fonction rationnelle des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de l'équation (1), tellement choisie, que les $1.2.3\ldots n$ valeurs qu'elle prend, par les substitutions des racines, soient toutes différentes, on pourra exprimer ces n racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ en fonction rationnelle de V.

Il ne sera pas inutile de faire connaître ici la démonstration que Galois a donnée de ce théorème dans le célèbre Mémoire inséré au tome XI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

soit une fonction rationnelle des racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de l'équation (1), tellement choisie, que les $1.2.3\ldots n$ valeurs qu'elle prend, par les substitutions des racines, soient toutes différentes, on pourra exprimer ces n racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ en fonction rationnelle de V.

Il ne sera pas inutile de faire connaître ici la démonstration que Galois a donnée de ce théorème dans le célèbre Mémoire inséré au tome XI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Nous désignerons par V_0 la valeur donnée de V, et par

$$V_0, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$$

les $\mu = 1.2.3\ldots(n-1)$ valeurs que prend V, par les substitutions des $n-1$ racines

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}.$$

On aura alors une équation en V du degré μ, savoir

(2) $$(V - V_0)(V - V_1)\ldots(V - V_{\mu-1}) = 0,$$

dont les racines $V_0, V_1, \ldots$ seront toutes différentes et dont les coefficients, qui sont des fonctions symétriques des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de l'équation

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = 0,$$

s'exprimeront rationnellement par les coefficients de cette équation, c'est-à-dire en fonction rationnelle de x_0 et des coefficients de l'équation proposée (1). Par suite, l'équation (2) pourra être mise sous la forme

(3) $$F(V, x_0) = 0,$$

F désignant une fonction rationnelle de V et de x_0. Or l'équation (2) ou (3) est satisfaite pour $V = V_0$; on aura

donc identiquement

$$F(V_0, x_0) = 0,$$

en sorte que l'équation

(4) $$F(V_0, x) = 0$$

sera satisfaite en posant

$$x = x_0,$$

et, en conséquence, les équations (1) et (4) auront une racine commune x_0. Je dis, de plus, que ces équations ne sauraient avoir d'autre racine commune. Supposons, en effet, que l'équation (4) soit satisfaite pour $x = x_1$, on aura identiquement

$$F(V_0, x_1) = 0;$$

par suite, l'équation

(5) $$F(V, x_1) = 0$$

sera satisfaite pour $V = V_0$. Or l'équation (5) se déduit de l'équation (3), ou de l'équation (2), par la transposition des racines x_0 et x_1 ; d'ailleurs, par cette transposition, les quantités $V_0, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$ se changent en d'autres $V'_0, V'_1, \ldots, V'_{\mu-1}$, toutes distinctes des premières par hypothèse ; donc l'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$(V - V'_0)(V - V'_1)\ldots(V - V'_{\mu-1}) = 0,$$

et l'on voit qu'elle ne saurait avoir V_0 pour racine.

Les équations (1) et (4) n'ayant que la seule racine commune x_0, on déterminera facilement cette racine. Pour cela on cherchera le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $F(V_0, x)$, et l'on poussera l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne un reste du premier degré en x : en égalant à zéro ce reste, on aura une équation qui fera connaître la valeur de x_0,

$$x_0 = \psi(V_0) \quad \text{ou} \quad x_0 = \psi(V);$$

2. d. Camille Jordan , *Traité des substitutions* (1870)

La « **théorie de Galois** » n'est pas une excroissance de la théorie des équations.

Les « **idées** » **générales** de Galois

Un cadre théorique: les **groupes de substitutions**

Objectif: résolution algébrique des équations

"Background" : travaux de Lagrange et de Cauchy, nombre de valeurs des fonctions

Principes: (Adjonction), substitutions, groupes

Etapes:

Association d'un groupe à l'équation

Décomposition du groupe

(CNS résolubilité)

("application")

2. La sédimentation de la théorie de Galois (1880-1900)

3. a. Présence de Galois dans les mathématiques 1870-1895

Articles dont le titre ou le compte rendu fait référence à Galois dans le *Jahrbuch uber die Fortrischte Mathematik*

Classification	**Nombre d'articles**
Histoire et philosophie	**2**
Algèbre	**33**
Dont: Equations	22
Dont: Eliminations, substitutions, déterminants, invariants, covariants, fonctions symétriques	11
Arithmétique (théorie des nombres)	**3**
Calcul différentiel et intégral	**8**
Dont : Equations différentielles générales	7
Dont: EDP	1
Théorie des fonctions	**10**
Dont: Généralités	1
Dont: Fonctions particulières	9

Des constantes

Des noms propres aux côtés de celui de Galois: Jordan, Serret, Kronecker et Dedekind, Netto, Bachmann.

Des objets usuels: « groupes de Galois », « théorèmes de Galois », « résolvantes de Galois ».

Des travaux de Galois… absents.

Des contours flous et des différences

Une « théorie des substitutions de Galois » ou bien une « théorie des équations de Galois » ?

Une théorie des équations sur laquelle se greffe le concept de corps?

Une nouvelle théorie, proche de la théorie des groupes?

Une théorie des équations liée aux groupes de substitutions?

3. b. Des enseignements de la théorie de Galois

Yale

Professor Pierpont devotes himself to the analytical side of pure Mathematics, and has given courses on Introduction to Higher Analysis, Substitution Theory, Galois' Theory of Algebraic Equations, Functional Theory of Real and Complex Variables, Elliptic Functions, Linear Differential Equations, Modular Functions, Theory of Continuous Groups, and Theory of Numbers. Finally, Professor Smith, representing Mod-

Pise

L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*

Johns Hopkins

Dr. Hulburt gave the following courses:

1. Synthetic Geometry. *Three times weekly, first half-year.*

In this course the projective properties of figures in two and three dimensions were studied from a purely geometrical standpoint. Reye was the author followed, with frequent references to Steiner, Von Staudt, and Cremona.

2. Theory of Substitutions. *Three times weekly, second half-year.*

In this course were studied the general theory of substitution groups and Galois's theory of algebraic equations. The authors chiefly referred to were Netto, Serret, Jordan, and Bolza.

A few lectures were given at the close, introductory to Klein's Theory of the Ikosahedron.

Cambridge Students' guide

Theory of Equations. Todhunter, Burnside and Panton.

Higher Algebra. Salmon, Serret.

Theorie der Functionen. Durége, Weier-strass, Biermann.

Substitutionen-Theorie. Netto, Jordan, Klein.

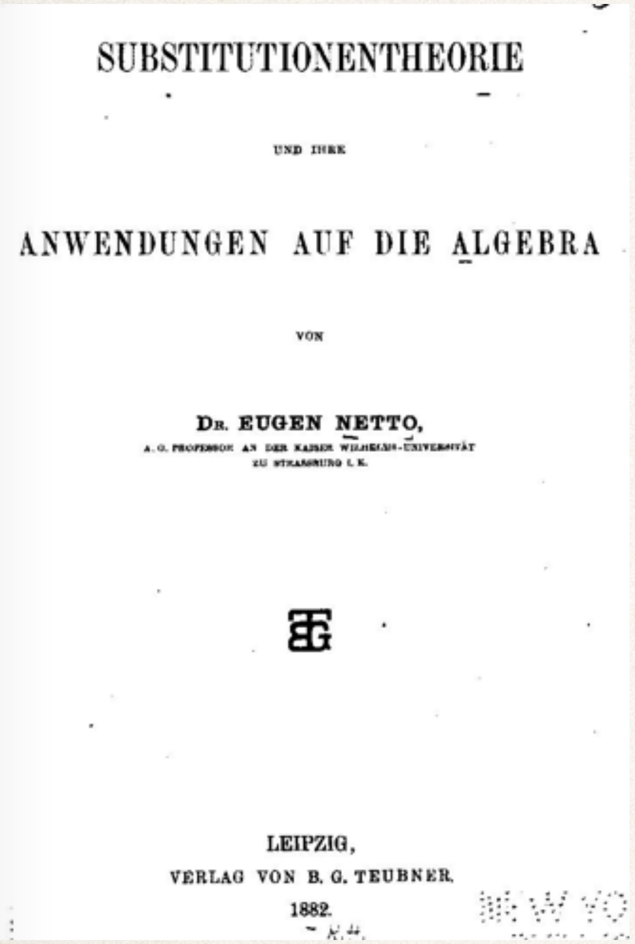
Paris (examen de licence)

« Qu'appelle-t-on groupe d'une équation algébrique ? Démontrer sa propriété fondamentale »

Madrid

J. Echegaray, *Resolucion de ecuaciones y teoria de Galois*

Des manuels et livres de synthèses qui ne servent pas seulement pour l'enseignement


SUBSTITUTIONENTHEORIE

UND IHRE

ANWENDUNGEN AUF DIE ALGEBRA

VON

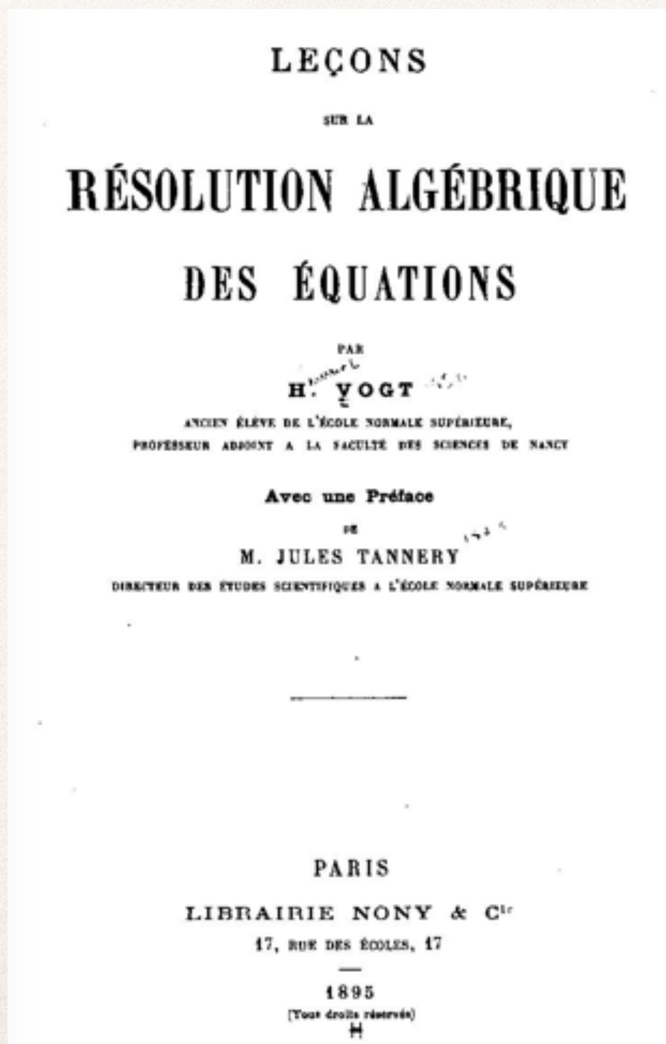
DR. EUGEN NETTO,

A. O. PROFESSOR AN DER KAISER WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU STRASSBURG I. E.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.


LEÇONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

DES ÉQUATIONS

PAR

H. VOGT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

Avec une Préface

DE

M. JULES TANNERY

DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

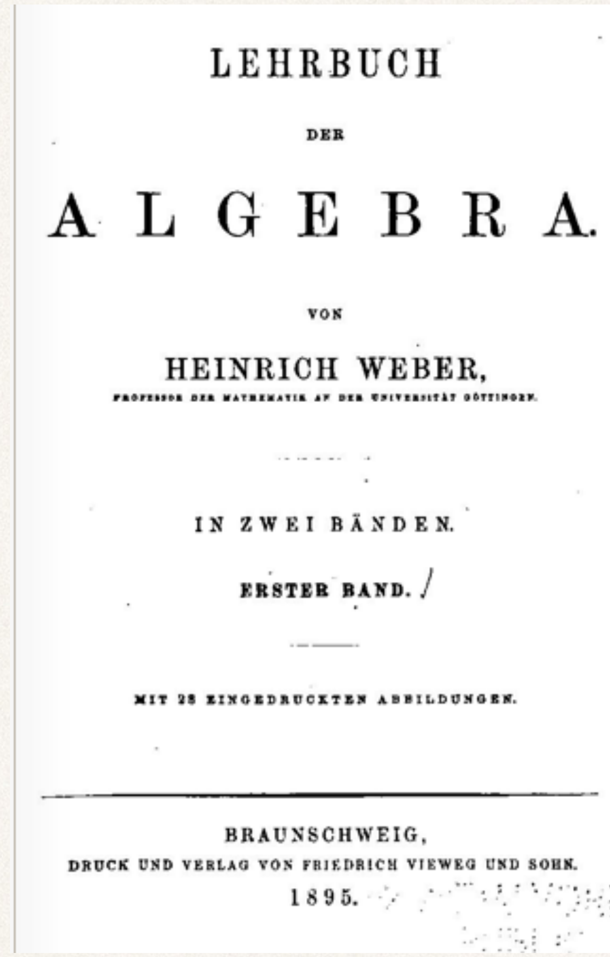
PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, RUE DES ÉCOLES, 17

1895

(Tous droits réservés)


LEHRBUCH

DER

ALGEBRA.

VON

HEINRICH WEBER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

IN ZWEI BÄNDEN.

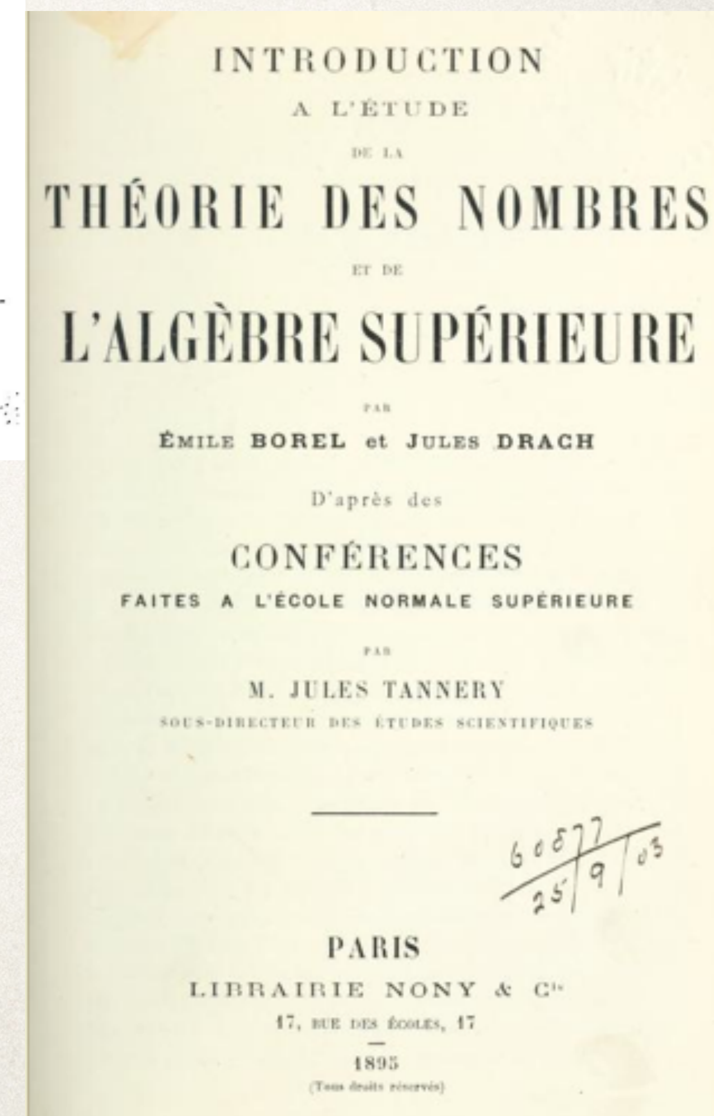
ERSTER BAND.

MIT 28 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1895.


INTRODUCTION

A L'ÉTUDE

DE LA

THÉORIE DES NOMBRES

ET DE

L'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

PAR

ÉMILE BOREL et JULES DRACH

D'après des

CONFÉRENCES

FAITES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PAR

M. JULES TANNERY

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, RUE DES ÉCOLES, 17

1895

(Tous droits réservés)

Merci de votre attention!