

Théorie spectrale et formes automorphes

Félicien Comtat

Queen Mary University of London

Mai 2019

Motivation

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Propriétés **analytiques** d'un groupe arithmétique Γ (**discret**).

Motivation

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Propriétés **analytiques** d'un groupe arithmétique Γ (**discret**).
Étude de fonctions Γ -invariantes.

Motivation

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Propriétés **analytiques** d'un groupe arithmétique Γ (**discret**).
Étude de fonctions Γ -invariantes.
Théorie des représentations, analyse fonctionnelle.

Théorie de Fourier

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$: fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (à égalité presque partout près) tq

- $f(x + 1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$
- $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$

Théorie de Fourier

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$: fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (à égalité presque partout près) tq

- $f(x + 1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$
- $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$

Produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ (espace de Hilbert)

Théorie de Fourier

Théorie spectrale et formes automorphes

Félicien Comtat

Introduction

Premiers exemples

Formes automorphes

$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$: fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (à égalité presque partout) tq

- $f(x + 1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$
- $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$

Produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$ (espace de Hilbert)

Théorème

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On a

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f|e_n \rangle e_n,$$

où $e_n(x) = \exp(2i\pi nx)$.

Théorie de Fourier : exemple d'application

Corollaire (Parseval)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On a

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f | e_n \rangle|^2$$

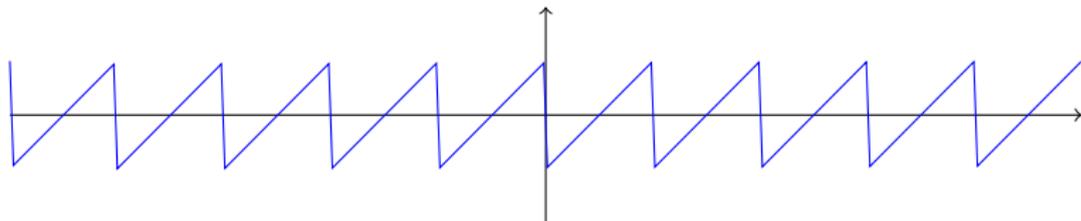
Théorie de Fourier : exemple d'application

Corollaire (Parseval)

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On a

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f | e_n \rangle|^2$$

Application : calcul des valeurs de $\zeta(2k)$ à l'aide de fonctions polynomiales par morceaux.



Formes modulaires

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Formes modulaires

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est une **forme modulaire** de poids $k \in \mathbb{N}$ pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ou certains sous-groupes) si :

Formes modulaires

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est une **forme modulaire** de poids $k \in \mathbb{N}$ pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ou certains sous-groupes) si :

- $f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$,

Formes modulaires

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est une **forme modulaire** de poids $k \in \mathbb{N}$ pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ou certains sous-groupes) si :

- $f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$,
- f est holomorphe sur \mathbb{H} ,

Formes modulaires

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est une **forme modulaire** de poids $k \in \mathbb{N}$ pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ou certains sous-groupes) si :

- $f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$,
- f est holomorphe sur \mathbb{H} ,
- f est “holomorphe aux pointes”.

Formes modulaires

Théorie spectrale et formes automorphes

Félicien Comtat

Introduction

Premiers exemples

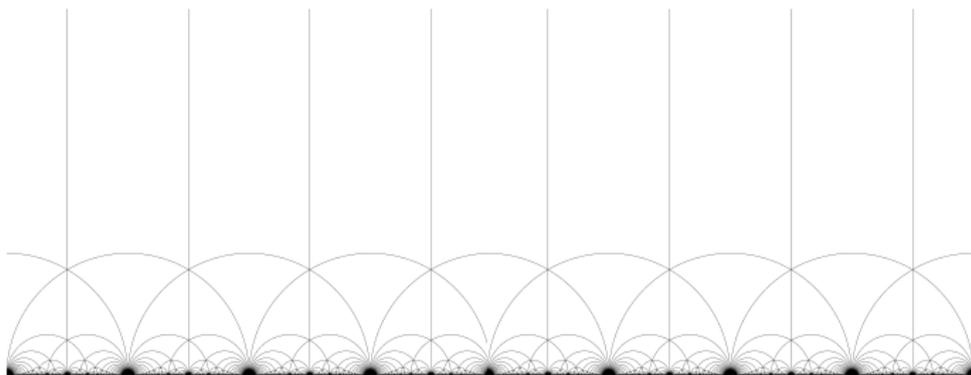
Formes automorphes

$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ est une **forme modulaire** de poids $k \in \mathbb{N}$ pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (ou certains sous-groupes) si :

- $f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$ pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$,
- f est holomorphe sur \mathbb{H} ,
- f est “holomorphe aux pointes”.



Formes modulaires : exemple d'application

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z}$$

“presque” une forme modulaire.

Formes modulaires : exemple d'application

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z}$$

“presque” une forme modulaire. θ^4 forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cap \begin{bmatrix} * & * \\ 4\mathbb{Z} & * \end{bmatrix}$.

Formes modulaires : exemple d'application

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z}$$

“presque” une forme modulaire. θ^4 forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cap \begin{bmatrix} * & * \\ 4\mathbb{Z} & * \end{bmatrix}$.

$$\theta^4(z) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{n_4 \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi(n_1^2 + \dots + n_4^2)z} = \sum_n \sum_{n_1^2 + \dots + n_4^2 = n} e^{2i\pi n z}.$$

Formes modulaires : exemple d'application

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n^2 z}$$

“presque” une forme modulaire. θ^4 forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cap \begin{bmatrix} * & * \\ 4\mathbb{Z} & * \end{bmatrix}$.

$$\theta^4(z) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{n_4 \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi(n_1^2 + \dots + n_4^2)z} = \sum_n \sum_{n_1^2 + \dots + n_4^2 = n} e^{2i\pi n z}.$$

“Corollaire” (Lagrange)

Tout entier naturel est somme de quatre carrés

Fonctions sur $SL_2(\mathbb{R})$

$G = SL_2(\mathbb{R})$, groupe topologique avec une mesure de Haar :
 $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $A \subset G$ mesurable et $g \in G$.

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Fonctions sur $SL_2(\mathbb{R})$

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$G = SL_2(\mathbb{R})$, groupe topologique avec une **mesure de Haar** :
 $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $A \subset G$ mesurable et $g \in G$.
 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ sous-groupe discret.

Fonctions sur $SL_2(\mathbb{R})$

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$G = SL_2(\mathbb{R})$, groupe topologique avec une **mesure de Haar** :
 $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $A \subset G$ mesurable et $g \in G$.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ sous-groupe discret.

$L^2(\Gamma \backslash G)$: espace de Hilbert des “fonctions” $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (invariance à **gauche**).

Fonctions sur $SL_2(\mathbb{R})$

Théorie spectrale et formes automorphes

Félicien Comtat

Introduction

Premiers exemples

Formes automorphes

$G = SL_2(\mathbb{R})$, groupe topologique avec une **mesure de Haar** :
 $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $A \subset G$ mesurable et $g \in G$.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ sous-groupe discret.

$L^2(\Gamma \backslash G)$: espace de Hilbert des “fonctions” $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (invariance à **gauche**).
- $\int_{\Gamma \backslash G} |\phi(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$,

Fonctions sur $SL_2(\mathbb{R})$

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$G = SL_2(\mathbb{R})$, groupe topologique avec une **mesure de Haar** :
 $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $A \subset G$ mesurable et $g \in G$.

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ sous-groupe discret.

$L^2(\Gamma \backslash G)$: espace de Hilbert des “fonctions” $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (invariance à **gauche**).
- $\int_{\Gamma \backslash G} |\phi(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$,

Remarque

f forme modulaire de poids k pour Γ . Alors

$$\phi_f(g) = (ci + d)^{-k} f(g \cdot i) \text{ où } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est Γ -invariante. Si f est **cuspidale** alors $\phi_f \in L^2(\Gamma \backslash G)$.

Représentation régulière droite de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$\phi \in L^2(\Gamma \backslash G)$, Γ -invariante à **gauche**. Action à **droite** de $g \in G$:

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg)$$

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Représentation régulière droite de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$\phi \in L^2(\Gamma \backslash G)$, Γ -invariante à **gauche**. Action à **droite** de $g \in G$:

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg)$$

Objectif

Décomposition de la représentation régulière droite R .

Représentation régulière droite de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$\phi \in L^2(\Gamma \backslash G)$, Γ -invariante à **gauche**. Action à **droite** de $g \in G$:

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg)$$

Objectif

Décomposition de la représentation régulière droite R .

Remarque

R est **unitaire**

$$\begin{aligned}\langle R(g)\phi | R(g)\psi \rangle &= \int_{\Gamma \backslash G} \phi(xg) \overline{\psi(xg)} d\mu(x) \\ &= \int_{\Gamma \backslash G} \phi(y) \overline{\psi(y)} d\mu(yg^{-1}) = \langle \phi | \psi \rangle.\end{aligned}$$

Le Laplacien

Théorie de Lie \rightsquigarrow Laplacien Δ défini sur $\mathcal{C}^\infty \cap L^2(\Gamma \backslash G)$ tel que pour toute fonction ϕ et pour tout $g \in G$,

$$\Delta(R(g)\phi) = R(g)(\Delta\phi)$$

et Δ préserve les sous-espaces **fermés** invariants par R .

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Le Laplacien

Théorie de Lie \rightsquigarrow Laplacien Δ défini sur $\mathcal{C}^\infty \cap L^2(\Gamma \backslash G)$ tel que pour toute fonction ϕ et pour tout $g \in G$,

$$\Delta(R(g)\phi) = R(g)(\Delta\phi)$$

et Δ préserve les sous-espaces **fermés** invariants par R .

Lemme (Schur)

ρ_1, ρ_2 représentations irréductibles d'un groupe G sur un même \mathbb{C} -espace vectoriel V . $T : V \rightarrow V$ linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_1(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T = \lambda Id_V$.

Le Laplacien

Théorie spectrale et formes automorphes

Félicien Comtat

Introduction

Premiers exemples

Formes automorphes

Théorie de Lie \rightsquigarrow Laplacien Δ défini sur $\mathcal{C}^\infty \cap L^2(\Gamma \backslash G)$ tel que pour toute fonction ϕ et pour tout $g \in G$,

$$\Delta(R(g)\phi) = R(g)(\Delta\phi)$$

et Δ préserve les sous-espaces **fermés** invariants par R .

Lemme (Schur)

ρ_1, ρ_2 représentations irréductibles d'un groupe G sur un même \mathbb{C} -espace vectoriel V . $T : V \rightarrow V$ linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_1(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T = \lambda Id_V$.

\Rightarrow Si (ρ, V) sous-représentation **irréductibles** de R alors V sous-espaces propres de Δ .

Le Laplacien

Théorie de Lie \rightsquigarrow Laplacien Δ défini sur $C^\infty \cap L^2(\Gamma \backslash G)$ tel que pour toute fonction ϕ et pour tout $g \in G$,

$$\Delta(R(g)\phi) = R(g)(\Delta\phi)$$

et Δ préserve les sous-espaces **fermés** invariants par R .

Lemme (Schur)

ρ_1, ρ_2 représentations irréductibles d'un groupe G sur un même \mathbb{C} -espace vectoriel V . $T : V \rightarrow V$ linéaire tel que pour tout $g \in G$, $\rho_1(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T = \lambda Id_V$.

\Rightarrow Si (ρ, V) sous-représentation **irréductibles** de R alors V sous-espaces propres de Δ .

Δ **symétrique** : pour tout ϕ, ψ , $\langle \phi | \Delta \psi \rangle = \langle \Delta \phi | \psi \rangle$

\Rightarrow Ces sous-espaces sont **orthogonaux**.

L'action de SO_2

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$K = SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \text{ sous-groupe compact.}$$

L'action de SO_2

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$K = SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \text{ sous-groupe compact.}$$

Théorème (Peter–Weyl)

ρ représentation continue **unitaire** d'un groupe **compact** K sur un **espace de Hilbert** \mathcal{H} . Alors

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i$$

avec ρ_i représentation irréductible de dimension finie.

L'action de SO_2

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$K = SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \text{ sous-groupe compact.}$$

Théorème (Peter–Weyl)

ρ représentation continue **unitaire** d'un groupe **compact** K sur un **espace de Hilbert** \mathcal{H} . Alors

$$\rho = \bigoplus_i \rho_i$$

avec ρ_i représentation irréductible de dimension finie.

\Rightarrow Si (ρ, V) sous-représentation de R alors $V = \bigoplus_i V_i$, V_i de dimension finie et stable par l'action de K .

Formes automorphes

Schur+Peter-Weyl \Rightarrow les sous-représentations irréductibles de R sont engendrées par des fonctions $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

1 $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Formes automorphes

Schur+Peter-Weyl \Rightarrow les sous-représentations irréductibles de R sont engendrées par des fonctions $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- 1 $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,
- 2 ϕ fonction propre du Laplacien Δ ,

Formes automorphes

Schur+Peter-Weyl \Rightarrow les sous-représentations irréductibles de R sont engendrées par des fonctions $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- 1 $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,
- 2 ϕ fonction propre du Laplacien Δ ,
- 3 ϕ est K -finie.

Formes automorphes

Schur+Peter-Weyl \Rightarrow les sous-représentations irréductibles de R sont engendrées par des fonctions $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- 1 $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,
- 2 ϕ fonction propre du Laplacien Δ ,
- 3 ϕ est K -finie.

Définition (forme automorphe)

ϕ est une **forme automorphe** si ϕ satisfait (1)-(3) et une certaine condition de croissance modérée.

Formes automorphes

Schur+Peter-Weyl \Rightarrow les sous-représentations irréductibles de R sont engendrées par des fonctions $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tq

- 1 $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,
- 2 ϕ fonction propre du Laplacien Δ ,
- 3 ϕ est K -finie.

Définition (forme automorphe)

ϕ est une **forme automorphe** si ϕ satisfait (1)-(3) et une certaine condition de croissance modérée.

Remarque (croissance modérée)

Croissance modérée au lieu de $L^2(\Gamma \backslash G)$

\rightsquigarrow existence de formes automorphes non L^2

\rightsquigarrow spectre continu.

Exemple : les formes modulaires revisitées

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Rappel : $G \curvearrowright \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ via $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Exemple : les formes modulaires revisitées

Rappel : $G \curvearrowright \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ via $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tq pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$

$$f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

on définit $\phi_f(g) = (ci + d)^{-k} f(g \cdot i)$ pour $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$

Exemple : les formes modulaires revisitées

Rappel : $G \curvearrowright \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ via $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tq pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$

$$f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

on définit $\phi_f(g) = (ci + d)^{-k} f(g \cdot i)$ pour $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$

“Les formes modulaires sont des formes automorphes”

- $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ et $\phi_f\left(g \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\right) = e^{ik\theta} \phi_f(g)$.

Exemple : les formes modulaires revisitées

Rappel : $G \curvearrowright \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ via $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tq pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$

$$f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

on définit $\phi_f(g) = (ci + d)^{-k} f(g \cdot i)$ pour $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$

“Les formes modulaires sont des formes automorphes”

- $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ et $\phi_f\left(g \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\right) = e^{ik\theta} \phi_f(g)$.
- f holomorphe $\Rightarrow \Delta \phi_f = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{2}\right) \phi_f$ (Cauchy-Riemann).

Exemple : les formes modulaires revisitées

Rappel : $G \curvearrowright \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ via $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tq pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$

$$f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

on définit $\phi_f(g) = (ci + d)^{-k} f(g \cdot i)$ pour $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$

“Les formes modulaires sont des formes automorphes”

- $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ et $\phi_f\left(g \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\right) = e^{ik\theta} \phi_f(g)$.
- f holomorphe $\Rightarrow \Delta \phi_f = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{2}\right) \phi_f$ (Cauchy-Riemann).
- f holomorphe aux pointes \Rightarrow croissance modérée.

Exemple : les formes modulaires revisitées

Rappel : $G \curvearrowright \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ via $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tq pour tout $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$

$$f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^k f(z)$$

on définit $\phi_f(g) = (ci + d)^{-k} f(g \cdot i)$ pour $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$

“Les formes modulaires sont des formes automorphes”

- $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ et $\phi_f\left(g \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\right) = e^{ik\theta} \phi_f(g)$.
- f holomorphe $\Rightarrow \Delta \phi_f = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{2}\right) \phi_f$ (Cauchy-Riemann).
- f holomorphe aux pointes \Rightarrow croissance modérée.

Si f est cuspidale alors $\phi_f \in L^2(\Gamma \backslash G)$ et génère une sous-représentation irréductible de R .

Exemple : formes de Maaß

Métrie hyperbolique sur \mathbb{H} : $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

\rightsquigarrow Laplacien hyperbolique $\Delta_{\mathbb{H}} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

Exemple : formes de Maaß

Métrie hyperbolique sur \mathbb{H} : $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

\rightsquigarrow Laplacien hyperbolique $\Delta_{\mathbb{H}} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

Définition (Forme de Maaß)

$f \in L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, fonction propre de $\Delta_{\mathbb{H}}$.

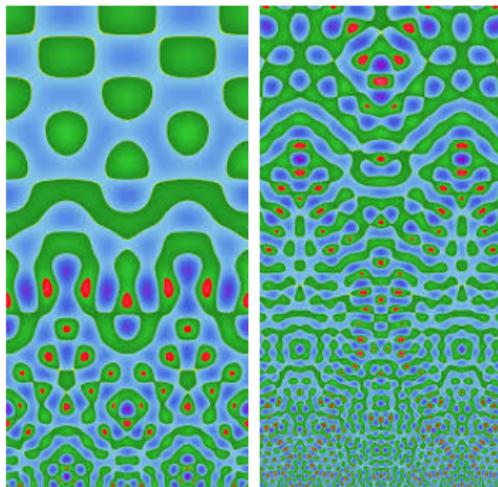
Exemple : formes de Maaß

Métrie hyperbolique sur \mathbb{H} : $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

\rightsquigarrow Laplacien hyperbolique $\Delta_{\mathbb{H}} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

Définition (Forme de Maaß)

$f \in L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, fonction propre de $\Delta_{\mathbb{H}}$.



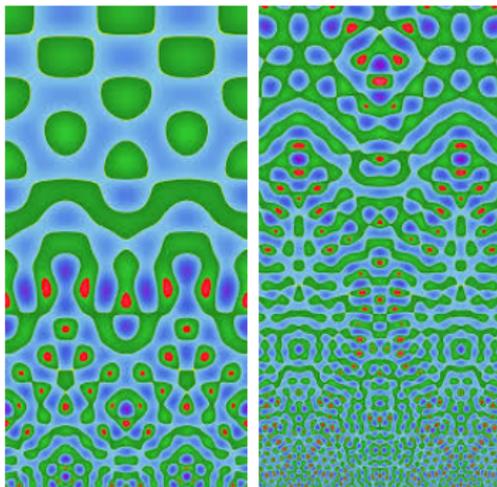
Exemple : formes de Maaß

Métrie hyperbolique sur \mathbb{H} : $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

\rightsquigarrow Laplacien hyperbolique $\Delta_{\mathbb{H}} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

Définition (Forme de Maaß)

$f \in L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, fonction propre de $\Delta_{\mathbb{H}}$.



$\phi_f(g) = f(g \cdot i)$.
 ϕ_f forme automorphe.

Le spectre continu

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

R **n'est pas** complètement réductible.

Le spectre continu

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

R n'est pas complètement réductible.

$$L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}) = \left(\bigoplus_{\pi \text{ irréductible}} \pi \right) \oplus \int_0^\infty \pi_r dr.$$

π_r : représentation engendrée par une certaine forme automorphe **non** L^2 (séries d'Eisenstein).

Le spectre continu

R n'est pas complètement réductible.

$$L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}) = \left(\bigoplus_{\pi \text{ irréductible}} \pi \right) \oplus \int_0^\infty \pi_r dr.$$

π_r : représentation engendrée par une certaine forme automorphe **non** L^2 (séries d'Eisenstein).

Analogie avec la transformée de Fourier :

$$\underbrace{f(t)}_{\in L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \underbrace{e^{2i\pi\xi t}}_{\notin L^2(\mathbb{R})} d\xi.$$

Séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ agit sur \mathbb{H} par $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z = z + n$.

Séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ agit sur \mathbb{H} par $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z = z + n$.
 $\Rightarrow z \mapsto \text{Im}(z)$ est Γ_∞ -invariante.

Séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ agit sur \mathbb{H} par $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z = z + n$.

$\Rightarrow z \mapsto \text{Im}(z)$ est Γ_∞ -invariante.

\Rightarrow pour $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$

$$E(z|\psi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\text{Im}(\gamma \cdot z))$$

est Γ -invariante (si converge).

Séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ agit sur \mathbb{H} par $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot z = z + n$.
 $\Rightarrow z \mapsto \text{Im}(z)$ est Γ_∞ -invariante.
 \Rightarrow pour $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$

$$E(z|\psi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\text{Im}(\gamma \cdot z))$$

est Γ -invariante (si converge).

Propriété / définition (Séries d'Eisenstein)

$\text{Re}(s) > 1$

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\text{Im}(\gamma \cdot z))^s$$

fonction $s(1-s)$ -propre de $\Delta_{\mathbb{H}}$ et Γ -invariante, non $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$.

Séries d'Eisenstein et décomposition spectrale

Inversion de Mellin

Si $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+)$, on a pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) y^s ds,$$

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

Séries d'Eisenstein et décomposition spectrale

Inversion de Mellin

Si $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+)$, on a pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) y^s ds, \quad \text{où } \hat{\psi}(s) = \int_0^{+\infty} \psi(y) y^{-s-1} dy.$$

Séries d'Eisenstein et décomposition spectrale

Inversion de Mellin

Si $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+)$, on a pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) y^s ds, \quad \text{où } \hat{\psi}(s) = \int_0^{+\infty} \psi(y) y^{-s-1} dy.$$

$\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+) \Rightarrow E(\cdot|\psi) \in L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, et pour $\sigma > 1$:

$$E(z|\psi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\operatorname{Im}(\gamma \cdot z))$$

Séries d'Eisenstein et décomposition spectrale

Inversion de Mellin

Si $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+)$, on a pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) y^s ds, \quad \text{où } \hat{\psi}(s) = \int_0^{+\infty} \psi(y) y^{-s-1} dy.$$

$\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+) \Rightarrow E(\cdot|\psi) \in L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, et pour $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} E(z|\psi) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\operatorname{Im}(\gamma \cdot z)) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) (\operatorname{Im}(\gamma \cdot z))^s ds \end{aligned}$$

Séries d'Eisenstein et décomposition spectrale

Inversion de Mellin

Si $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+)$, on a pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\psi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) y^s ds, \quad \text{où } \hat{\psi}(s) = \int_0^{+\infty} \psi(y) y^{-s-1} dy.$$

$\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+) \Rightarrow E(\cdot|\psi) \in L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, et pour $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} E(z|\psi) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \psi(\operatorname{Im}(\gamma \cdot z)) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) (\operatorname{Im}(\gamma \cdot z))^s ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) E(z, s) ds \end{aligned}$$

Prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$E(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) E(z, s) ds$$

Problème : représentation associée à $E(., s)$ **non unitaire**.

Prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$E(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) E(z, s) ds$$

Problème : représentation associée à $E(., s)$ **non unitaire**.

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, $E(z, s)$ admet un prolongement analytique à $s \in \mathbb{C}$ avec pôle en $s = 1$.

Prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$E(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) E(z, s) ds$$

Problème : représentation associée à $E(\cdot, s)$ **non unitaire**.

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, $E(z, s)$ admet un prolongement analytique à $s \in \mathbb{C}$ avec pôle en $s = 1$. La représentation associée à $E(z, s)$ est unitaire pour $\text{Im}(s) = \frac{1}{2}$ ou $s \in [0, 1[$.

Prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Théorie
spectrale et
formes
automorphes

Félicien
Comtat

Introduction

Premiers
exemples

Formes
automorphes

$$E(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \hat{\psi}(s) E(z, s) ds$$

Problème : représentation associée à $E(., s)$ **non unitaire**.

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, $E(z, s)$ admet un prolongement analytique à $s \in \mathbb{C}$ avec pôle en $s = 1$. La représentation associée à $E(z, s)$ est unitaire pour $\operatorname{Im}(s) = \frac{1}{2}$ ou $s \in [0, 1[$.

Déplacement du contour d'intégration :

$$E(z|\psi) = \underbrace{\hat{\psi}(1) \operatorname{Res}_{s=1} E(z, s)}_{\text{indépendant de } z} + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\frac{1}{2}} \hat{\psi}(s) E(z, s) ds}_{\text{spectre continu}}.$$

Merci de votre attention !