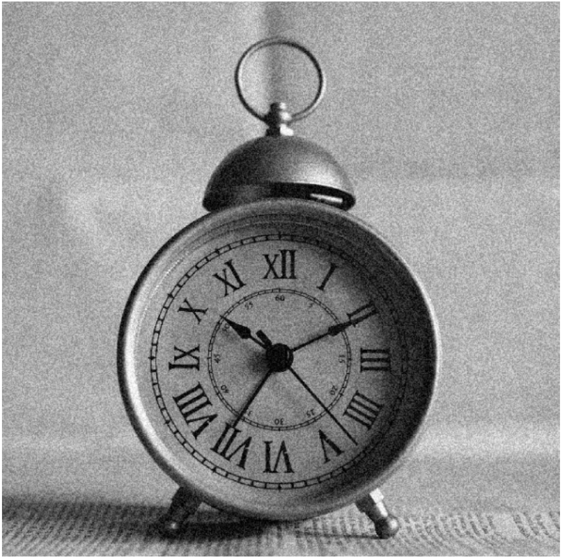
Débruitage d'image par minimisation de la variation totale

CMAP, Ecole Polytechnique

Corentin Caillaud, Antonin Chambolle

20 mai 2019, Colloque Inter'Actions 2019, Bordeaux

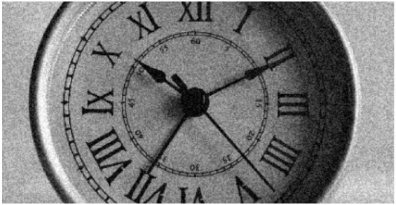
Débruitage d'image



donnée

résultat

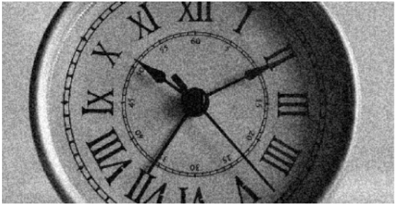
Débruitage par minimisation d'une énergie



$$u^* = \arg\min_u \; \underbrace{\frac{1}{2}||u - u^0||^2_{L^2}}_{\text{fidélité}} + \lambda \underbrace{||\nabla u||}_{\text{régularité}}$$

- u^0 : image bruitée

Débruitage par minimisation d'une énergie

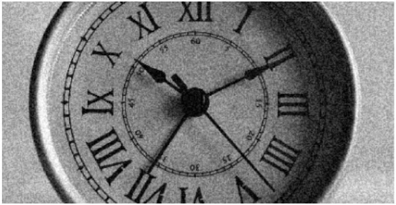


$$u^* = \arg\min_u \underbrace{\frac{1}{2}||u - u^0||^2_{L^2}}_{\text{fidélité}} + \lambda \underbrace{||\nabla u||}_{\text{régularité}}$$

- u^0 : image bruitée
- λ : paramètre de régularisation :

$$\lambda = 0 \longrightarrow u^* = u^0 \quad \text{vs} \quad \lambda = +\infty \longrightarrow u^* = \text{cste}$$

Débruitage par minimisation d'une énergie



$$u^* = \arg\min_u \; \underbrace{\frac{1}{2}||u - u^0||^2_{L^2}}_{\text{fidélité}} + \lambda \underbrace{||\nabla u||}_{\text{régularité}}$$

- u^0 : image bruitée
- λ : paramètre de régularisation :

$$\lambda = 0 \longrightarrow u^* = u^0 \quad \text{vs} \quad \lambda = +\infty \longrightarrow u^* = \text{cste}$$

- $||.||$: norme à choisir

Premier essai : $||.|| = ||.||_{L^2}^2$

Problème continu : $u^0 \in L^2([0,1]^2)$

$$u^* = \underset{u \in H^1([0,1]^2)}{\arg\min} \frac{1}{2}||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda \int_{[0,1]^2} |\nabla u|^2$$

Premier essai : $||.|| = ||.||_{L^2}^2$

Problème continu : $u^0 \in L^2([0,1]^2)$

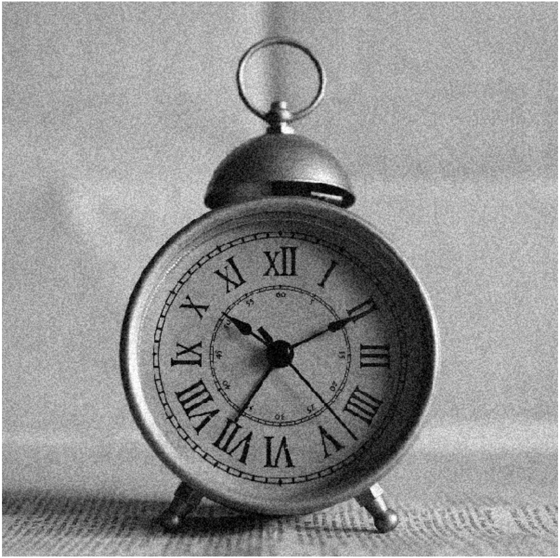
$$u^* = \underset{u \in H^1([0,1]^2)}{\arg\min} \frac{1}{2}||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda \int_{[0,1]^2} |\nabla u|^2$$

Problème discret : $h = 1/N$, $u_h^0 =$ projection $P0(= \mathbb{R}^{N \times N})$ de u^0

$$u_h^* = \underset{u \in P0}{\arg\min} \frac{1}{2}||u - u_h^0||_2^2 + \lambda \sum_{i,j} |(Du)_{i,j}|^2$$

où $D =$ différences finies usuelles i.e. $(Du)_{i,j} = \begin{pmatrix} u_{i+1,j} - u_{i,j} \\ u_{i,j+1} - u_{i,j} \end{pmatrix}$

Ça marche !



$\lambda = 0.05$

Ça marche !

$\lambda = 1$

Ça marche !

$\lambda = 5$

Ça marche !

$\lambda = 10$

Ça marche !

$\lambda = 20$

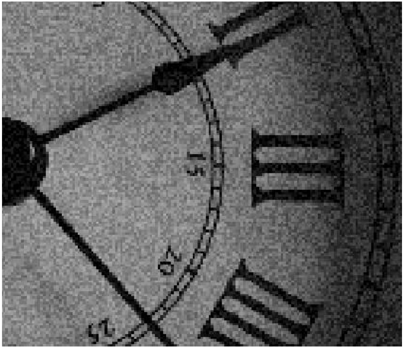
Ça marche !

$\lambda = 80$

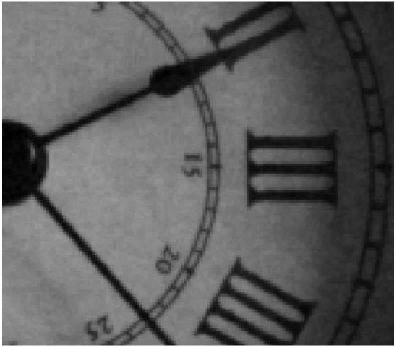
Ça marche !

on choisit $\lambda = 5$

Ça marche ! mais...



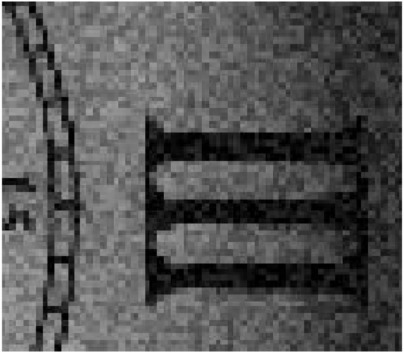
u^0 : image bruitée



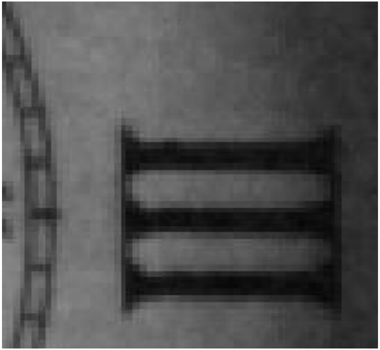
u_h^* : image débruitée

On voudrait récupérer les "sauts" de l'image.

Ça marche ! mais...



u^0 : image bruitée



u_h^* : image débruitée

On voudrait récupérer les “sauts” de l’image.

Deuxième essai : $||.|| = ||.||_{L^1}$

Problème continu :

$$u^* = \arg\min_{u \in ?} \frac{1}{2} ||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda \int_{[0,1]^2} |\nabla u|$$

Deuxième essai : $||.|| = ||.||_{L^1}$

Problème continu :

$$u^* = \arg\min_{u \in ?} \frac{1}{2}||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda \int_{[0,1]^2} |\nabla u|$$

où

$$\int_{[0,1]^2} |\nabla u| = \int_{[0,1]^2} \sup \left\{ \langle \nabla u | \varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}^2) \ : \ |\varphi| \leq 1 \right\}$$

Deuxième essai : $||.|| = ||.||_{L^1}$

Problème continu :

$$u^* = \underset{u \in ?}{\arg\min} \frac{1}{2}||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda \int_{[0,1]^2} |\nabla u|$$

où

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} |\nabla u| &= \int_{[0,1]^2} \sup \left\{ \langle \nabla u | \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}^2)\ :\ |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{[0,1]^2} -u\ \operatorname{div} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}^2)\ :\ |\varphi| \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

Deuxième essai : $||.|| = ||.||_{L^1}$

Problème continu :

$$u^* = \underset{u \in ?}{\arg\min} \frac{1}{2}||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda \int_{[0,1]^2} |\nabla u|$$

où

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} |\nabla u| &= \int_{[0,1]^2} \sup \left\{ \langle \nabla u | \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}^2) \ :\ |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{[0,1]^2} -u \ \operatorname{div} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}^2) \ :\ |\varphi| \leq 1 \right\} \\ &\overset{\text{def}}{=} TV(u)\end{aligned}$$

$$BV \overset{\text{def}}{=} \{ u \in L^1 \ :\ TV(u) < +\infty \}$$

Modèle de ROF, première discrétisation

Problème continu : (Rudin, Osher et Fatemi, 1992)

$$u^* = \underset{u \in BV \cap L^2}{\arg\min} \frac{1}{2} ||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda TV(u) \stackrel{\text{def}}{=} E(u)$$

où $TV(u) = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int -u \ \operatorname{div} \varphi = \int |\nabla u|$ si u régulière

Modèle de ROF, première discrétisation

Problème continu : (Rudin, Osher et Fatemi, 1992)

$$u^* = \underset{u \in BV \cap L^2}{\arg\min} \frac{1}{2} ||u - u^0||_{L^2}^2 + \lambda TV(u) \stackrel{\text{def}}{=} E(u)$$

où $TV(u) = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int -u \ \operatorname{div} \varphi = \int |\nabla u|$ si u régulière

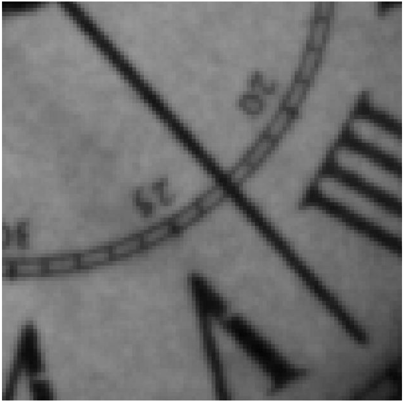
Problème discret :

$$u_h^* = \underset{u \in P0}{\arg\min} \frac{1}{2} ||u - u_h^0||_2^2 + \lambda TV_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} E_h(u)$$

où $TV_d(u) = \sum_{i,j} |(Du)_{i,j}| = \sum_{i,j} \left| \begin{pmatrix} u_{i+1,j} - u_{i,j} \\ u_{i,j+1} - u_{i,j} \end{pmatrix} \right|$

Ça marche mieux

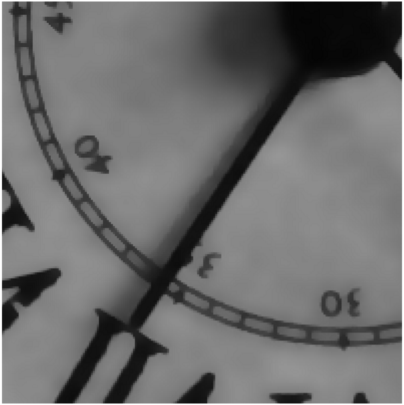
Ça marche mieux



u_h^* pour $||.||_{L^2}^2$ $\qquad$ u_h^* pour TV_d

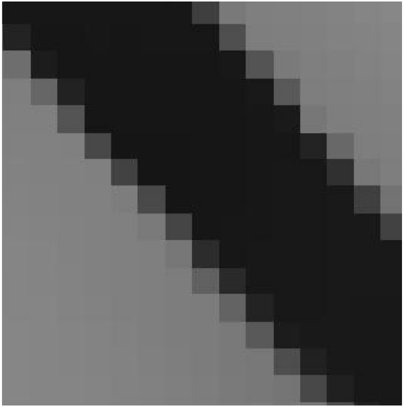
Ça marche mieux, mais...

u_h^* pour TV_d

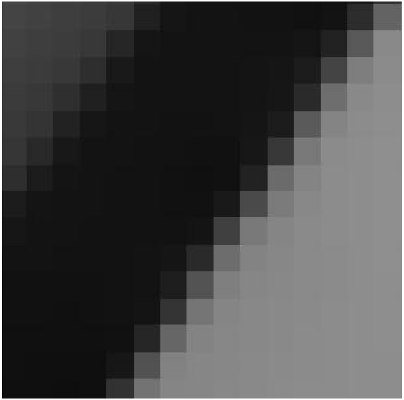


u_h^* pour TV_d

Ça marche mieux, mais...



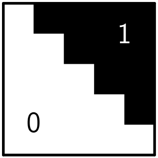
u_h^* pour TV_d



u_h^* pour TV_d

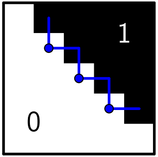
Anisotropie de TV_d

$$u_{\triangle} =$$



$$\color{blue}{TV_d(u_{\triangle})} = \sum_{i,j} |(Du_{\triangle})_{i,j}|$$

Anisotropie de TV_d

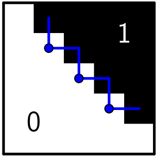
$u_{\triangle} =$ 

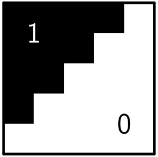
$$\color{blue}{TV_d(u_{\triangle})} = \sum_{i,j} |(Du_{\triangle})_{i,j}|$$

$$= \sum_{\color{blue}{\bullet}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\simeq \color{blue}{N\sqrt{2}}$$

Anisotropie de TV_d

$u_{◺} =$ 

$u_{◿} =$ 

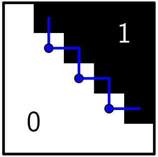
$$TV_d(u_{◺}) = \sum_{i,j} |(Du_{◺})_{i,j}|$$

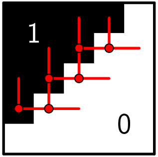
$$= \sum_{\bullet} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\simeq N\sqrt{2}$$

$$TV_d(u_{◿}) = \sum_{i,j} |(Du_{◿})_{i,j}|$$

Anisotropie de TV_d

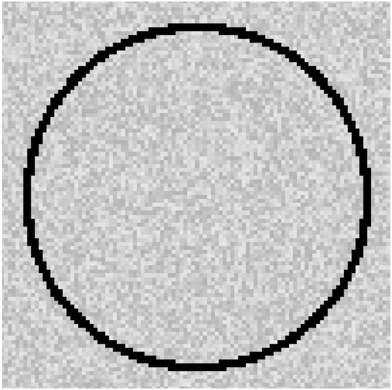
$u_{\triangleright} =$ 

$u_{\triangleleft} =$ 

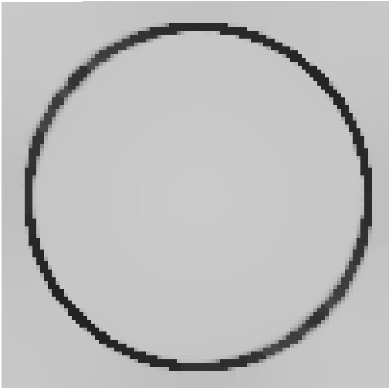
$$\color{blue}{TV_d(u_{\triangleright})} = \sum_{i,j} |(Du_{\triangleright})_{i,j}| = \sum_{\color{blue}{\bullet}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \simeq \color{blue}{N\sqrt{2}}$$

$$\color{red}{TV_d(u_{\triangleleft})} = \sum_{i,j} |(Du_{\triangleleft})_{i,j}| = \sum_{\color{red}{\bullet}} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \text{ ou } \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \simeq \color{red}{2N}$$

Anisotropie de TV_d

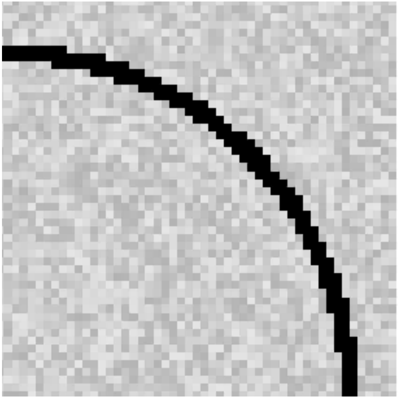


u^0 : image bruitée

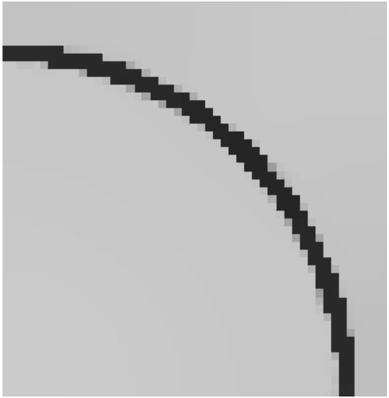


u_h^* : image débruitée

Anisotropie de TV_d

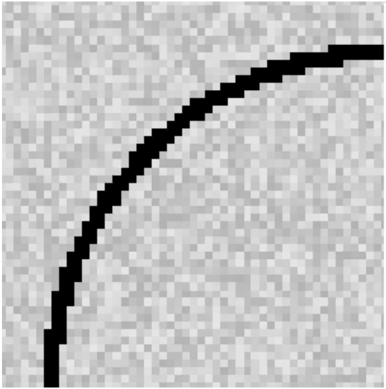


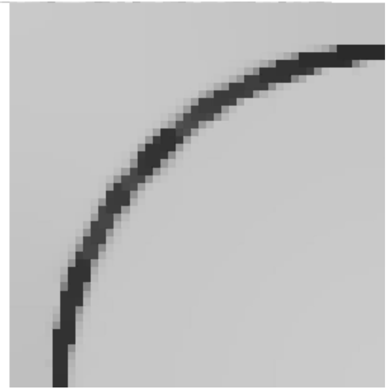
u^0 : image bruitée



u_h^* : image débruitée

Anisotropie de TV_d



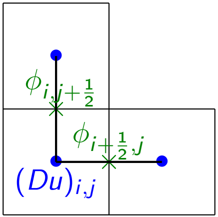


u^0 : image bruitée $\qquad$ u_h^* : image débruitée

Une autre variation totale discrète

Dans l'article *Discrete Total Variation : New definition and minimization, 2017*, Condat remarque :

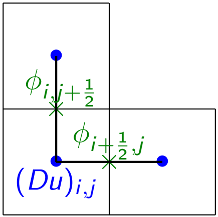
$|Du| = \sup_{|\phi| \leq 1} \langle Du | \phi \rangle$ pour un champ ϕ localisé sur une grille décalée $(i + \frac{1}{2}, j)$ et $(i, j + \frac{1}{2})$.



Une autre variation totale discrète

Dans l'article *Discrete Total Variation : New definition and minimization, 2017*, Condat remarque :

$|Du| = \sup_{|\phi| \leq 1} \langle Du | \phi \rangle$ pour un champ ϕ localisé sur une grille décalée $(i + \frac{1}{2}, j)$ et $(i, j + \frac{1}{2})$.



On propose : $\widetilde{TV_d}(u) = \sup \left\{ \int -u \,\mathrm{div}\, \phi, \ \phi \in P1^2 \ : \ |\phi| \leq 1 \right\}$
où $P1^2 = \{ \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \ : \ \phi_1$ et ϕ_2 affines par morceaux$\}$

Une autre variation totale discrète

$$\widetilde{TV_d}(u) = \sup \left\{ \int -u \operatorname{div} \phi,\ \phi \in P1^2 \ :\ |\phi| \leq 1 \right\}$$

$$(\phi_1)_{i,j}(x,y) = a^1_{i,j} x + b^1_{i,j} y + c^1_{i,j} \qquad (\phi_2)_{i,j}(x,y) = a^2_{i,j} x + b^2_{i,j} y + c^2_{i,j}$$

Une autre variation totale discrète

$$\widetilde{TV_d}(u) = \sup\left\{ \int -u \operatorname{div}\phi,\ \phi \in P1^2 \ : \ |\phi| \le 1 \right\}$$

$$(\phi_1)_{i,j}(x,y) = a^1_{i,j}x + b^1_{i,j}y + c^1_{i,j} \qquad (\phi_2)_{i,j}(x,y) = a^2_{i,j}x + b^2_{i,j}y + c^2_{i,j}$$

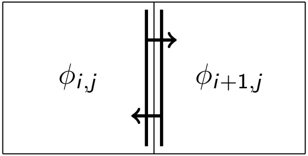
- Seul $\operatorname{div}\phi$ importe : on peut prendre ϕ_1 constant selon y et ϕ_2 constant selon x : $b^1_{i,j} = a^2_{i,j} = 0$

Une autre variation totale discrète

$$\widetilde{TV}_d(u) = \sup \left\{ \int -u \operatorname{div} \phi, \ \phi \in P1^2 \ : \ |\phi| \leq 1 \right\}$$

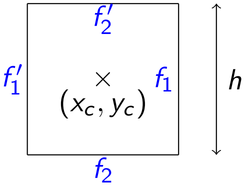
$$(\phi_1)_{i,j}(x,y) = a^1_{i,j}x + b^1_{i,j}y + c^1_{i,j} \qquad (\phi_2)_{i,j}(x,y) = a^2_{i,j}x + b^2_{i,j}y + c^2_{i,j}$$

- Seul $\operatorname{div}\phi$ importe : on peut prendre ϕ_1 constant selon y et ϕ_2 constant selon x : $b^1_{i,j} = a^2_{i,j} = 0$
- Pour avoir pour u régulière, $\int -u \operatorname{div}\phi = \int \langle \nabla u | \phi \rangle$, il faut que $\int_{\text{bord}} u \langle \phi | \nu \rangle = 0$: le flux de ϕ à travers une arête est le même de chaque côté : une équation reliant $(a^1_{i,j}, c^1_{i,j})$ à $(a^1_{i+1,j}, c^1_{i+1,j})$ et $(b^2_{i,j}, c^2_{i,j})$ à $(b^2_{i,j+1}, c^2_{i,j+1})$



Une autre variation totale discrète : champs $RT0_0$

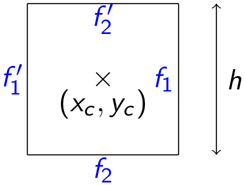
Dans la cellule (i,j) :



$$\phi_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1 + f_1'}{2} + \dfrac{f_1' - f_1}{h}(x - x_c) \\[2ex] \dfrac{f_2 + f_2'}{2} + \dfrac{f_2' - f_2}{h}(y - y_c) \end{pmatrix}$$

Une autre variation totale discrète : champs $RT0_0$

Dans la cellule (i,j) :



$$\phi_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1 + f_1'}{2} + \dfrac{f_1' - f_1}{h}(x - x_c) \\ \\ \dfrac{f_2 + f_2'}{2} + \dfrac{f_2' - f_2}{h}(y - y_c) \end{pmatrix}$$

On pose $\widetilde{TV_d}(u) = \sup \left\{ -\int u \operatorname{div} \phi,\ \phi \in RT0_0 \ : \ |\phi| \leq 1 \right\}$
où $RT0_0 = \{\phi_f,\ f_e \in \mathbb{R},\ e$ arête interne$\}$

Modèle de ROF, deuxième discrétisation

Problème discret numéro 1 :

$$u_h^* = \arg\min_{u \in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||_2^2 + \lambda TV_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} E_h(u)$$

où $TV_d(u) = \sum_{i,j} |(Du)_{i,j}| = \sum_{i,j} \left| \begin{pmatrix} u_{i+1,j} - u_{i,j} \\ u_{i,j+1} - u_{i,j} \end{pmatrix} \right|$

Modèle de ROF, deuxième discrétisation

Problème discret numéro 1 :

$$u_h^* = \arg\min_{u \in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||_2^2 + \lambda TV_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} E_h(u)$$

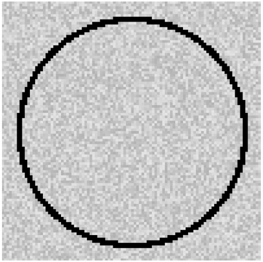
où $TV_d(u) = \sum_{i,j} |(Du)_{i,j}| = \sum_{i,j} \left| \begin{pmatrix} u_{i+1,j} - u_{i,j} \\ u_{i,j+1} - u_{i,j} \end{pmatrix} \right|$

Problème discret numéro 2 :

$$\widetilde{u}_h^* = \arg\min_{u \in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||_2^2 + \lambda \widetilde{TV}_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{E}_h(u)$$

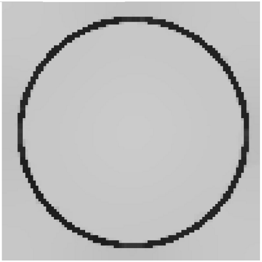
où $\widetilde{TV}_d(u) = \sup \left\{ -\int u \operatorname{div} \phi,\ \phi \in RT0_0 \ :\ |\phi| \leq 1 \right\}$

Ça marche encore mieux !



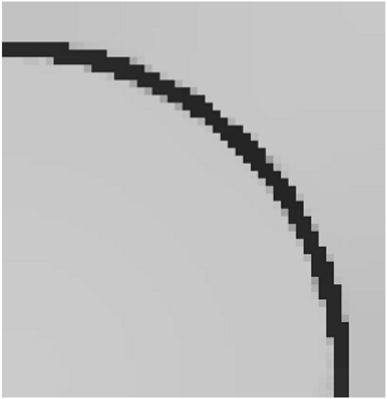
u^0 : image bruitée

u_h^* : avec TV_d

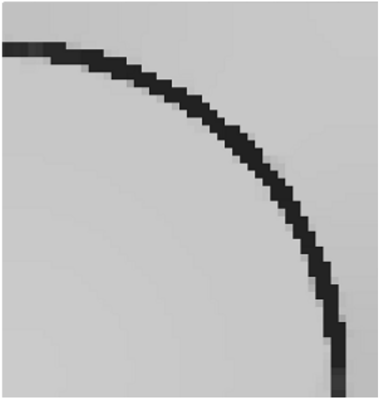


$\tilde{u}_h^*$: avec $\widetilde{TV_d}$

Ça marche encore mieux !

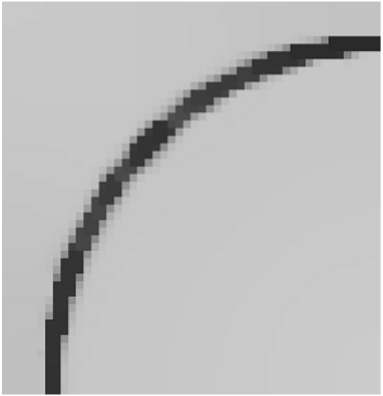


u_h^* : avec TV_d

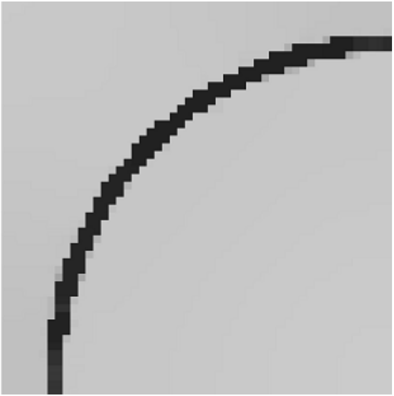


$\tilde{u}_h^*$: avec $\widetilde{TV}_d$

Ça marche encore mieux !



u_h^* : avec TV_d



$\tilde{u}_h^*$: avec $\widetilde{TV}_d$

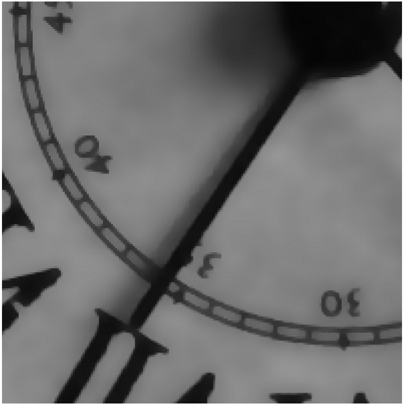
Ça marche encore mieux !

Ça marche encore mieux !

u_h^* : avec TV_d

$\tilde{u}_h^*$: avec $\widetilde{TV_d}$

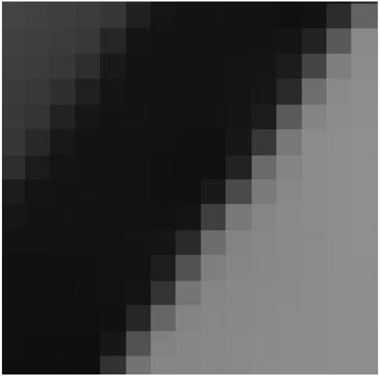
Ça marche encore mieux !



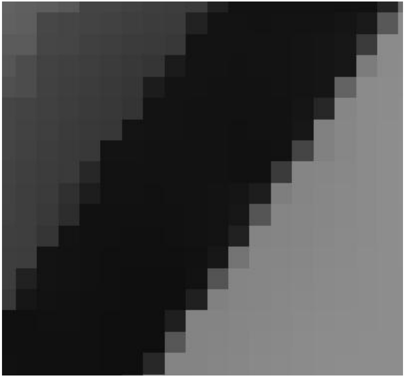
u_h^* : avec TV_d

$\tilde{u}_h^*$: avec $\widetilde{TV}_d$

Ça marche encore mieux !



u_h^* : avec TV_d



$\tilde{u}_h^*$: avec $\widetilde{TV}_d$

$\widetilde{TV}_d$ est "meilleure" que TV_d

Pb continu : $u^* = \arg\min_{u \in BV} \frac{1}{2}||u - u^0||^2_{L^2} + \lambda TV(u) \stackrel{\text{def}}{=} E(u)$

Pb discret 1 : $u_h^* = \arg\min_{u \in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||_2^2 + \lambda TV_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} E_h(u)$

Pb discret 2 : $\widetilde{u}_h^* = \arg\min_{u \in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||_2^2 + \lambda \widetilde{TV}_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{E}_h(u)$

$\widetilde{TV}_d$ est "meilleure" que TV_d

Pb continu : $u^* = \arg\min_{u\in BV} \frac{1}{2}||u - u^0||^2_{L^2} + \lambda TV(u) \stackrel{\text{def}}{=} E(u)$
Pb discret 1 : $u_h^* = \arg\min_{u\in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||^2_2 + \lambda TV_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} E_h(u)$
Pb discret 2 : $\widetilde{u}_h^* = \arg\min_{u\in P0} \frac{1}{2}||u - u_h^0||^2_2 + \lambda \widetilde{TV}_d(u) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{E}_h(u)$

Théorème :

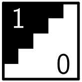
1. Si u^0 est tel que la solution du problème dual du problème continu est globalement lipschitzienne, alors :

$$\exists c > 0,\ \forall h > 0,\ |E(u^*) - \widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*)| \leq ch$$

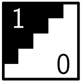
2. Il existe un u^0 tel que :

$$\exists c > 0,\ \forall h > 0,\ |E(u^*) - E_h(u_h^*)| \geq ch^{2/3}$$

Eléments de preuve

2. Essentiellement, on prend $u^0 = u_{\triangle} =$ 

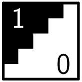
Eléments de preuve

2. Essentiellement, on prend $u^0 = u_{\triangle} =$ 

En utilisant les symétries de u^0, on se ramène à un problème 1D :

$$E_h(u_h^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\min_u \lambda \sum_{l=-2N}^{2N} \sqrt{(u_{l+1} - u_l)^2 + (u_l - u_{l-1})^2} + \frac{h}{2} \sum_{l=-2N}^{2N} (u_l - u_l^0)^2 \right)$$

où $u_l^0 = \delta_{l>0}$ (et $u_0^0 = 1/2$), et $u_{2N+1} - u_{2N} = u_{-2N} - u_{-2N-1} = 0$

2. Essentiellement, on prend $u^0 = u_{\triangle} =$ 

En utilisant les symétries de u^0, on se ramène à un problème 1D :

$$E_h(u_h^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\min_u \lambda \sum_{l=-2N}^{2N} \sqrt{(u_{l+1} - u_l)^2 + (u_l - u_{l-1})^2} + \frac{h}{2} \sum_{l=-2N}^{2N} (u_l - u_l^0)^2 \right)$$

où $u_l^0 = \delta_{l>0}$ (et $u_0^0 = 1/2$), et $u_{2N+1} - u_{2N} = u_{-2N} - u_{-2N-1} = 0$

Après un changement de variable et un passage au problème dual on montre que

$$h^{-2/3} |E_h(u_h^*) - E(u^*)| \xrightarrow[h \to 0]{} \max_{\substack{\sigma(0)=\rho(0)=0 \\ 2\sigma + \rho^2 \leq 0}} \frac{1}{2}\rho'(0) - \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty |2\sigma' + \rho''|^2 > 0$$

d'où le résultat.

Élements de preuve

1. a. Estimation primale :

$$\widetilde{TV_d}(\Pi_{P0}u^*) = \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -\Pi_{P0}u^* \operatorname{div} \phi$$

Élements de preuve

1. a. Estimation primale :

$$\widetilde{TV_d}(\Pi_{P0} u^*) = \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -\Pi_{P0} u^* \operatorname{div} \phi$$

$$= \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -u^* \operatorname{div} \phi$$

Élements de preuve

1. a. Estimation primale :

$$\widetilde{TV_d}(\Pi_{P0}u^*) = \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -\Pi_{P0}u^* \operatorname{div} \phi$$
$$= \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -u^* \operatorname{div} \phi$$
$$\leq \sup_{\varphi,\ |\varphi| \leq 1} \int -u^* \operatorname{div} \varphi = TV(u^*)$$

Ainsi $\widetilde{TV_d}(\Pi_{P0}u^*) \leq TV(u^*)$.

Élements de preuve

1. a. Estimation primale :

$$\widetilde{TV_d}(\Pi_{P0}u^*) = \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -\Pi_{P0}u^* \operatorname{div} \phi$$

$$= \sup_{\substack{\phi \in RT0_0 \\ |\phi| \leq 1}} \int -u^* \operatorname{div} \phi$$

$$\leq \sup_{\varphi,\ |\varphi| \leq 1} \int -u^* \operatorname{div} \varphi = TV(u^*)$$

Ainsi $\widetilde{TV_d}(\Pi_{P0}u^*) \leq TV(u^*)$.

De plus $||\Pi_{P0}u^* - u_h^0||_2^2 = ||\Pi_{P0}(u^* - u^0)||_2^2 \overset{\text{Jensen}}{\leq} ||(u^* - u^0)||_2^2$

Élements de preuve

1. a. Estimation primale :

$$\begin{aligned}\widetilde{TV}_d(\Pi_{P0}u^*) &= \sup_{\substack{\phi\in RT0_0\\|\phi|\leq 1}} \int -\Pi_{P0}u^*\,\mathrm{div}\,\phi\\ &= \sup_{\substack{\phi\in RT0_0\\|\phi|\leq 1}} \int -u^*\,\mathrm{div}\,\phi\\ &\leq \sup_{\varphi,\ |\varphi|\leq 1} \int -u^*\,\mathrm{div}\,\varphi = TV(u^*)\end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{TV}_d(\Pi_{P0}u^*) \leq TV(u^*)$.

De plus $||\Pi_{P0}u^* - u_h^0||_2^2 = ||\Pi_{P0}(u^* - u^0)||_2^2 \overset{\text{Jensen}}{\leq} ||(u^* - u^0)||_2^2$

Finalement, $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) \leq \widetilde{E}_h(\Pi_{P0}u^*) \leq E(u^*)$.

Élements de preuve

1. b. Estimation duale : Les problèmes duaux sont :

Problème continu :

$$\left(\min_{u \in BV} E(u) = \frac{1}{2} ||u - u^0||^2_{L^2} + \lambda TV(u) \right)$$

$$= \left(\max_{|\varphi| \leq 1} D(\varphi) = -\lambda \int u^0 \operatorname{div} \varphi \; - \frac{\lambda^2}{2} || \operatorname{div} \varphi ||^2_{L^2} \right)$$

Avec à l'optimum, $E(u^*) = D(\varphi^*)$ et $u^* = u^0 + \lambda \operatorname{div} \varphi^*$.

Élements de preuve

1. b. Estimation duale : Les problèmes duaux sont :

Problème continu :

$$\left(\min_{u\in BV} E(u) = \frac{1}{2}||u-u^0||^2_{L^2} + \lambda TV(u)\right)$$
$$= \left(\max_{|\varphi|\leq 1} D(\varphi) = -\lambda \int u^0 \operatorname{div}\varphi \; - \frac{\lambda^2}{2}||\operatorname{div}\varphi||^2_{L^2}\right)$$

Avec à l'optimum, $E(u^*) = D(\varphi^*)$ et $u^* = u^0 + \lambda \operatorname{div}\varphi^*$.

Problème discret :

$$\left(\min_{u\in P0} \widetilde{E}_h(u) = \frac{1}{2}||u-u_h^0||^2_2 + \lambda TV_d(u)\right)$$
$$= \left(\max_{\phi\in RT0_0,\ |\phi|\leq 1} \widetilde{D_h}(\phi) = -\lambda \int u_h^0 \operatorname{div}\phi \; - \frac{\lambda^2}{2}||\operatorname{div}\phi||^2_2\right)$$

Avec à l'optimum, $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) = \widetilde{D_h}(\phi^*)$ et $\tilde{u}_h^* = u_h^0 + \lambda \operatorname{div}\phi^*$.

Élements de preuve

On suppose que φ^* est $L-$lipschitzienne.

Alors sa projection $\phi_* = \Pi_{RT0_0}\varphi^*$ vérifie : $|\phi_*| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Lh$.

Élements de preuve

On suppose que φ^* est $L-$lipschitzienne.

Alors sa projection $\phi_* = \Pi_{RT0_0}\varphi^*$ vérifie : $|\phi_*| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Lh$.

On a donc

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \leq \widetilde{D_h}(\phi^*) = \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)$$

Élements de preuve

On suppose que φ^* est $L-$lipschitzienne.
Alors sa projection $\phi_* = \Pi_{RT0_0}\varphi^*$ vérifie : $|\phi_*| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Lh$.
On a donc

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \leq \widetilde{D_h}(\phi^*) = \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)$$

Par ailleurs on montre que

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \geq \frac{1}{1+ch}\widetilde{D_h}(\phi_*)$$

Élements de preuve

On suppose que φ^* est $L-$lipschitzienne.
Alors sa projection $\phi_* = \Pi_{RT0_0}\varphi^*$ vérifie : $|\phi_*| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Lh$.
On a donc

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \leq \widetilde{D_h}(\phi^*) = \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)$$

Par ailleurs on montre que

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \geq \frac{1}{1+ch}\widetilde{D_h}(\phi_*)$$

Et en utilisant $\operatorname{div}\phi_* = \Pi_{P0}\left(\operatorname{div}\varphi^*\right)$ et Jensen :

$$\widetilde{D_h}(\phi_*) \geq D(\varphi^*) - ch = E(u^*) - ch$$

Élements de preuve

On suppose que φ^* est $L-$lipschitzienne.
Alors sa projection $\phi_* = \Pi_{RT0_0}\varphi^*$ vérifie : $|\phi_*| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Lh$.
On a donc

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \leq \widetilde{D_h}(\phi^*) = \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)$$

Par ailleurs on montre que

$$\widetilde{D_h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}Lh}\phi_*\right) \geq \frac{1}{1+ch}\widetilde{D_h}(\phi_*)$$

Et en utilisant $\operatorname{div}\phi_* = \Pi_{P0}\left(\operatorname{div}\varphi^*\right)$ et Jensen :

$$\widetilde{D_h}(\phi_*) \geq D(\varphi^*) - ch = E(u^*) - ch$$

Finalement, $E(u^*) \leq (1+ch)\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$.

Élements de preuve

Finalement,

a. Estimation primale : $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) \leq E(u^*)$.

b. Estimation duale : $E(u^*) \leq (1 + ch)\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$.

Élements de preuve

Finalement,

a. Estimation primale : $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) \leq E(u^*)$.

b. Estimation duale : $E(u^*) \leq (1 + ch)\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$.

Donc

$$|E(u^*) - \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)| \leq ch\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$$

Élements de preuve

Finalement,

a. Estimation primale : $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) \leq E(u^*)$.

b. Estimation duale : $E(u^*) \leq (1 + ch)\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$.

Donc

$$\begin{aligned} |E(u^*) - \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)| &\leq ch\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch \\ &\leq chE(u^*) + ch \end{aligned}$$

Élements de preuve

Finalement,

a. Estimation primale : $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) \leq E(u^*)$.

b. Estimation duale : $E(u^*) \leq (1 + ch)\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$.

Donc

$$
\begin{aligned}
|E(u^*) - \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)| &\leq ch\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch \\
&\leq chE(u^*) + ch \\
&\leq Ch
\end{aligned}
$$

Finalement,

a. Estimation primale : $\widetilde{E}_h(\tilde{u}_h^*) \leq E(u^*)$.

b. Estimation duale : $E(u^*) \leq (1 + ch)\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch$.

Donc

$$\begin{aligned} |E(u^*) - \widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*)| &\leq ch\widetilde{E_h}(\tilde{u}_h^*) + ch \\ &\leq chE(u^*) + ch \\ &\leq Ch \end{aligned}$$

(En exploitant la forte convexité, on a : $||\tilde{u}_h^* - \Pi_{P0} u^*||_2 \leq C\sqrt{h}$.)

Conclusion

En résumé :

- débruitage par minimisation d'une énergie impliquant $||u - u^0||$ (fidélité) et $||\nabla u||$ (régulariseur, par exemple TV)

Conclusion

En résumé :

- débruitage par minimisation d'une énergie impliquant $||u - u^0||$ (fidélité) et $||\nabla u||$ (régulariseur, par exemple TV)
- différentes discrétisations de TV sont possibles, certaines sont plus isotropes que d'autres

Conclusion

En résumé :

- débruitage par minimisation d'une énergie impliquant $||u - u^0||$ (fidélité) et $||\nabla u||$ (régulariseur, par exemple TV)
- différentes discrétisations de TV sont possibles, certaines sont plus isotropes que d'autres
- savoir relier $TV(u)$ à $TV_d(\Pi u)$ est utile pour des estimations d'erreur

Conclusion

En résumé :

- débruitage par minimisation d'une énergie impliquant $||u - u^0||$ (fidélité) et $||\nabla u||$ (régulariseur, par exemple TV)
- différentes discrétisations de TV sont possibles, certaines sont plus isotropes que d'autres
- savoir relier $TV(u)$ à $TV_d(\Pi u)$ est utile pour des estimations d'erreur

Travail futur :

- des estimations d'erreurs pour d'autres variations totales (type Condat)

Merci de votre attention